Aufgabe 1 (4 + 3 + 1 + 2 + 1 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 2.8 & -0.7 \\ 1.2 & 2.4 & 0.6 \\ -0.4 & 0.0 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 3.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung, d.h. $PA = LR$, wobei P eine geeignete Permutationsmatrix ist. Geben sie L und R explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung.

c) Ist die Matrix A invertierbar? Begründung !

d) Berechnen Sie die Kondition κ von A bzgl. der ∞-Norm.
(**Hinweis:** Es gilt $\|A^{-1}\|_\infty \approx 2.604$.)

e) Betrachten Sie nun das gestörte Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Wie groß darf der relative Fehler $\|b - \tilde{b}\|_\infty / \|b\|_\infty$ höchstens sein, damit der relative Fehler $\|x - \tilde{x}\|_\infty / \|x\|_\infty$ nicht größer als 5% ist ?

Aufgabe 2 (2 + 6 + 1 + 2 Punkte)

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Meßwerte y_i

t_i	0	1	2
y_i	3/4	9/4	13/4

Gesucht ist die Gerade $y(t) = a(t-1) + b$ so, daß die Summe der Fehlerquadrate minimal wird.

a) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem mittels Givens–Rotationen. Gehen Sie dabei nicht zu den Normalgleichungen über.

c) Wie groß ist das Residuum?

d) Fertigen Sie eine Skizze an, in der Sie die Ausgleichsgerade und die Meßwerte eintragen.

Aufgabe 3 (3 + 4 + 2 + 2 Punkte)

Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + x_2^2} &= 2\,x_1\,, \\ \sin x_1 + \cos x_2 &= 4\,x_2\,, \end{aligned}$$

besitzt im Intervall $D := [-1, 1] \times [-1, 1]$ genau eine Lösung $x^\star = (x_1^\star, x_2^\star)^T$.

a) Formen Sie das obige Gleichungssystem durch geeignete Skalierung in eine äquivalente Fixpunktgleichung um. Geben Sie die entsprechende Funktion Φ, deren Fixpunkt $x^\star$ ist, explizit an, und bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von Φ.

b) Verifizieren Sie für das Fixpunktproblem in a) die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

c) Führen Sie ausgehend vom Startvektor $x^{(0)} = (0,0)^T$ zwei Iterationsschritte mit dem obigen Verfahren durch.

Achtung: Berechnen Sie die trigonometrischen Funktionen in Bogenmaß!

d) Schätzen Sie mit Hilfe der in b) bestimmten Lipschitz-Konstanten den Fehler $\|x^{(2)} - x^\star\|_\infty$ nach zwei Iterationsschritten ab.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 1 + 2 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(t) + y^2(t) + t \;=\; 0 \;\text{ für } t \in [\,0,1\,], \qquad y(0) = 1,\; y'(0) = 0\,.$$

a) Formen Sie die Differentialgleichung in ein System 1. Ordnung um und bestimmen Sie die zugehörigen Anfangswerte.

b) Lösen Sie das resultierende Problem näherungsweise mit dem expliziten Euler–Verfahren zur Schrittweite $h = 0.5$.

c) Geben Sie eine Näherung für $y''(1)$ an.

d) Welcher Typ von Gleichungen tritt bei Verwendung des **impliziten** Euler–Verfahrens in obigem Beispiel auf? Mit welchem Verfahren können diese Gleichungen gelöst werden?