Aufgabe 1 (2 + 1 + 1 + 3 + 1 Punkte)

Gegeben sei das Problem der Auswertung der Funktion

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Zur Lösung des Problems sei der Algorithmus

$$(*) \qquad y_1 := x^2,\ y_2 := 1 + y_1,\ y_3 := 1/y_2,\ y_4 := 1 - y_3$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Kondition des Problems für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Ist das Problem gut konditioniert? Begründung !

c) Gegeben sei der Eingabewert x, der mit einem relativen Fehler von 5 % behaftet ist. Welcher relativer Fehler ist in der Ausgabe zu erwarten?

d) Betrachten Sie den Algorithmus $(*)$. Ist dieser Algorithmus stabil? (Begründung !) Geben Sie gegebenenfalls einen geeigneten Algorithmus an.

e) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Kondition eines Problems und der Stabilität eines Algorithmus' zur Lösung dieses Problems?

Aufgabe 2 (6 + 4 + 1 Punkte)

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte y_i

t_i	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
y_i	4	1	0	1	4

.

Gesucht ist die Gerade $y(t) = a\,t^2 + b\cos(t) + c\,\sin(t)$ so, dass die Summe der Fehlerquadrate minimal wird.

a) Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem, und geben Sie die zugehörigen Normalgleichungen an.

b) Lösen Sie die Normalgleichungen mittels LDL^T–Zerlegung. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an (Rechnen Sie exakt, d.h. ohne Taschenrechner).

c) Welche Nachteile entstehen im Allgemeinen bei der Lösung des Ausgleichsproblems über die Normalgleichungen?

Aufgabe 3 (3 + 3 + 2 + 1 + 2 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} - \sin x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{pmatrix}, \qquad x = (x_1, x_2)^T,$$

besitze in $D := [\,0,1\,] \times [\,0,1\,]$ genau eine Nullstelle x^* (kein Beweis nötig).

a) Geben Sie die Iterationsfunktion Φ des Newton-Verfahrens zur Bestimmung von Näherungen der Nullstelle x^* von f explizit an.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x^{(0)} = (1, \pi/2)^T$ einen Schritt des Newton-Verfahrens durch (Rechnen Sie exakt, d.h. ohne Taschenrechner)

c) Erläutern Sie die Funktionsweise des Newton-Verfahrens im eindimensionalen Fall anhand einer Skizze.

d) Welche Konvergenzordnung besitzt das Newton–Verfahren im Allgemeinen? Ist die Konvergenz im Allgemeinen lokal oder global?

e) Erläutern Sie den Unterschied zwischen lokaler und globaler Konvergenz.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 4 + 2 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(t) + ty'(t) + 2 = 0 \text{ für } t \in [\,0,1\,], \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2\,.$$

a) Formen Sie die Differentialgleichung in ein System 1. Ordnung um und bestimmen Sie die zugehörigen Anfangswerte.

b) Lösen Sie das resultierende Problem näherungsweise mit dem **expliziten** Euler–Verfahren zur Schrittweite $h = 0.5$ (Rechnen Sie exakt, d.h. ohne Taschenrechner).

c) Lösen Sie das resultierende Problem näherungsweise mit dem **impliziten** Euler–Verfahren zur Schrittweite $h = 0.5$ (Rechnen Sie exakt, d.h. ohne Taschenrechner).

d) Geben Sie eine Näherung für $y(1)$, $y'(1)$ und $y''(1)$ an, wobei Sie wahlweise die Ergebnisse aus b) oder c) verwenden.