

Aufgabe 1

(11 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3000 \\ 1.5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1.17 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie $\text{cond}_\infty(A)$.
- Lösen Sie $Ax = b$ in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *mit* Spaltenpivotisierung.
- Lösen Sie $Ax = b$ in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik durch Gaußelimination *mit* Skalierung und *mit* Spaltenpivotisierung.
- Welchen Effekt hat die Skalierung, welchen die Pivotisierung?

Aufgabe 2

(8 Punkte)

Bestimmen Sie für das Intervall $[0, 1.5]$ den/die Fixpunkt(e) der Funktion

$$F(x) = \tan(x - 0.5)$$

bis auf einen absoluten Fehler von 0.01.

Benutzen Sie dazu das Fixpunktverfahren. Weisen Sie die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes explizit nach. (Begründen Sie Ihre Aussagen; ansonsten gibt es **keine** Punkte.) Führen Sie a-priori und a-posteriori Fehlerabschätzungen durch.

Aufgabe 3

(9 Punkte)

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Meßwerte y_i

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & -1 & 0 & 1.5 \\ \hline y_i & 1 & 2 & 1.5 \end{array}.$$

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, daß diese Meßdaten einer Funktion

$$y(t) = a t + b \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

genügen. Bestimmen Sie die Parameter a und b optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie dazu das entsprechende Ausgleichsproblem $\|Ax - f\|_2 \rightarrow \min$ und lösen Sie dieses mittels Givens-Rotationen (4-stellige Rechnung). Geben Sie die Funktion $y(t)$ und das Residuum explizit an.

ACHTUNG: Das Lösen mittels Normalgleichungen gibt **keine** Punkte.**Aufgabe 4**

(12 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.1111 & 0.1429 \\ 0.1429 & 0.1847 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.1194 \\ 0.1540 \end{pmatrix}.$$

Alle Werte resultieren aus Messungen und sind mit einem absoluten Fehler von maximal 0.00025 behaftet. Mit welchem Fehler (gemessen in der 1-Norm) müssen Sie bei der Lösung x des Gleichungssystems rechnen? Bestimmen Sie die L - R Zerlegung von A (4-stellige Rechnung) und verwenden Sie diese zur Lösung des obigen Gleichungssystems. Führen Sie anschließend einen Nachiterationsschritt aus.