Aufgabe 1: L-D-L^T-Zerlegung

(vgl. Übung 5 Aufgabe 3, 4 und insbesondere Testaufgabe 3)

Teil a)

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & \alpha(\alpha-2) \\ \alpha\beta & 0 & \alpha^2\beta+1 & 0 \\ 0 & \alpha(\alpha-2) & 0 & \alpha^2(\alpha-2)+\dfrac{\beta}{(\alpha-2)^3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\beta}{(\alpha-2)^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A ist genau dann (symmetrisch) positiv definit (spd), wenn alle $D_{ii} > 0$ sind. Also

$$\beta > 0 \text{ und } \alpha > 2 \text{ und } \frac{\beta}{(\alpha-2)^3} > 0.$$

Aus den ersten beiden Bedingungen folgt bereits die letzte, also ist A genau dann spd, wenn $\beta > 0$ und $\alpha > 2$.

Teil b)

$\det(A) = \det(L \cdot D \cdot L^T) = \det(L) \cdot \det(D) \cdot \det(L^T) = 1 \cdot \det(D) \cdot 1$. Falls $\alpha \neq 2$ gilt damit

$$det(A) = \frac{\beta^2}{(\alpha-2)^2}.$$

Teil c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot y_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} \to y_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot y_2 == \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \to y_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Teil d)

Der Aufwand der L-D-L^T-Zerlegung ist nur halb so hoch wie der der L-R-Zerlegung ($\frac{1}{6}n^3 \leftrightarrow \frac{1}{3}n^3$).

Der Speicherplatzbedarf der L-D-L^T-Zerlegung ist ebenfalls nur halb so hoch wie der der L-R-Zerlegung. (Man benötigt lediglich einen Vektor für die Diagonale von D, L wird im linken, unteren Teil von A gespeichert. Da A symmetrisch ist, geht dadurch keine Information verloren.)

Aufgabe 2: Lineare Gleichungssysteme und Fehlerabschätzung
(vgl. Übung 6 Aufgabe 1, 2 und insbesondere Testaufgabe 5)

$$A = \begin{pmatrix} 0.782 & 0.918 \\ 0.418 & 0.582 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.917 \\ 0.333 \end{pmatrix},$$

wobei alle Werte auf drei Stellen gerundet sind. Im Folgenden sind alle Normen, relativen Fehler und die Kondition in der 1-Norm berechnet. Der Index ist, da keine Verwechselung möglich, unterdrückt worden.

$$\text{falls } \; cond(A) \cdot r_A =: h < 1 \; \text{ gilt: } \; r_x \leq \frac{cond(A)}{1-h}(r_A + r_b)$$

$$\|A\| = \left\| \begin{pmatrix} 0.782 & 0.918 \\ 0.418 & 0.582 \end{pmatrix} \right\| = 1.5,$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \left| \frac{1}{det(A)} \right| \left\| \begin{pmatrix} 0.582 & -0.918 \\ -0.418 & 0.782 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1.7}{0.071400} = 23.8095$$

$$\rightarrow cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = 35.7143.$$

Aufgrund der Rundung gilt:

$$\|\Delta A\| \leq 2 \cdot 0.0005 = 0.001 \rightarrow r_A \leq \frac{2}{3} 10^{-3} \quad \text{und} \quad \|\Delta b\| \leq 2 \cdot 0.0005 = 0.001 \rightarrow r_b \leq 8 \cdot 10^{-4}$$

$$\rightarrow h \leq 0.023810 \quad \text{das heißt die Fehlerabschätzung darf angewendet werden.}$$

Es gilt damit:

$$r_x \leq 0.05366.$$

Um den absoluten Fehler $\|\Delta x\| = r_x \cdot \|x\|$ zu bestimmen, lösen wir das Gleichungssystem:

$$[A|b] = \begin{pmatrix} 0.782 & 0.918 & | & 0.917 \\ 0.418 & 0.582 & | & 0.333 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.782 & 0.918 & | & 0.917 \\ 0 & 0.0913043 & | & -0.157161) \end{pmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} 3.19328 \\ -1.72129 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich dann der absolute Fehler zu

$$\|\Delta x\| \leq 0.05366 \cdot (3.19328 + 1.72129) = 0.263708.$$

Aufgabe 3: Interpolation mit Fehlerabschätzung
(vgl. Übung 9 Aufgabe 5 (und Testaufgabe 9))

Teil a)
Zur Wahl der Stützstellen für eine möglichst gute Näherung betrachten wir die Fehlerabschätzung vorab: Mit $a := \min\{x_0, .., x_3, \overline{x}\}$, $b := \max\{x_0, .., x_3, \overline{x}\}$ gilt:

$$|f(\overline{x}) - p_3(\overline{x})| \leq \frac{1}{4!} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(4)}(\xi) \right| \prod_{i=0}^{3} |\overline{x} - x_i|$$

Dabei ist $f^{(4)}(\xi) = \cos(\xi)$. Wegen dieser Fehlerabschätzung wählen wir zur Approximation von $f(0.9)$ die Stützstellen $0.5, 0.75, 1, 1.25$. Der Fehler läßt sich dann wie folgt abschätzen:

$$|f(0.9) - p_3(0.9)| \leq \frac{1}{24} \max_{\xi \in [0.5, 1.25]} |\cos(\xi)| \prod_{i=0}^{3} |0.9 - x_i| = \frac{1}{24} 0.8776 \cdot 0.4 \cdot 0.25 \cdot 0.1 \cdot 0.35 = 7.679 \cdot 10^{-5}$$

Das Neville-Aitken-Schema zur spaltenweisen Berechnung lautet ($N_{i,1} := f_i$)

$$N_{i,j+1} = N_{i+1,j} + \frac{x_{i+j} - \overline{x}}{x_{i+j} - x_i} \left(N_{i,j} - N_{i+1,j} \right)$$

und ergibt dann

x_i	$N_{i,1}$	$N_{i,2}$	$N_{i,3}$	$N_{i,4}$
0.50	0.8776	0.64416	0.62232	0.62156
0.75	0.7317	0.61686	0.62089	
1.00	0.5403	0.63030		
1.25	0.3153			

und somit $\cos(0.9) \approx 0.6216$.

Teil b)
Für die Fehlerabschätzung erhalten wir (s.o., aber diesmal nur 3 statt 4 Stützstellen):

$$|f(0.1) - p_2(0.1)| \leq \frac{1}{3!} \max_{\xi \in [a,b]} |\sin(\xi)| \prod_{i=0}^{2} |0.1 - x_i|$$

Wie in der Übung nutzen wir die Symmetrie (hier: $\cos(x) = \cos(-x)$) aus und wählen die Stützstellen -0.25, 0 und 0.25. Dadurch wird sowohl der Anteil durch das Knotenpolynom ($\prod |0.1 - x_i|$) als auch der in Frage kommende Sinuswert optimal klein:

$$|f(0.1) - p_2(0.1)| \leq \frac{0.2474}{6} \cdot 0.35 \cdot 0.1 \cdot 0.15 = 2.165 \cdot 10^{-4}$$

Wir verwenden das Newtonsche Interpolationsschema (dividierte Differenzen) und erhalten

-0.25	0.9689	0.1244	-0.4976
0.00	1.0000	-0.1244	
0.25	0.9689		

Daraus folgt $p(x) = 0.9689 + (x + 0.25) \cdot (0.1244 - x \cdot 0.4976)$ und somit $\cos(0.1) \approx p(0.1) = 0.9950$.

Aufgabe 4: Nullstellen von Systemen: Fixpunkt/Newton

(vgl. Übung 8 Aufgabe 3 und Testaufgabe 8)

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(e^x e^{-y} + \ln(x+1)\right) \\ \frac{1}{5}\left(\tan\left(\frac{1}{2}x\right) + \left(y - \frac{3}{5}\right)^2\right) \end{pmatrix} \to F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(e^x e^{-y} + \frac{1}{x+1}\right) & -\frac{1}{8}e^x e^{-y} \\ \frac{1}{10}\left(1 + \tan\left(\frac{1}{2}x\right)^2\right) & \frac{2}{5}\left(y - \frac{3}{5}\right) \end{pmatrix}$$

Selbstabbildung ($D = [0,2]^2$):
F_1 ist auf D bzgl. x monoton steigend und bzgl. y monoton fallend:

$$F_1(D) \subset [F_1(0,2), F_1(2,0)] = \left[\frac{1}{8}\left(e^0 e^{-2} + \ln(1)\right), \frac{1}{8}\left(e^2 e^0 + \ln(3)\right)\right] = [0.01692, 1.061]$$

F_2 ist auf D bzgl. x monoton steigend und bzgl. y eine quadratische Funktion mit mit Minimum 0 (bei 3/5) und Maximum bei 2:

$$F_2(D) \subset \left[F_2\left(0, \frac{3}{5}\right), F_2(2,2)\right] = \left[\frac{1}{5}\left(\tan(0) + 0\right), \frac{1}{5}\left(\tan\left(\frac{2}{2}\right) + \left(2 - \frac{3}{5}\right)^2\right)\right] = [0, 0.7035]$$

Insgesamt wird also D durch F sicher in $D' := [0, 1.1] \times [0, 0.75] \supset [0.01692, 1.061] \times [0, 0.7035]$ abgebildet. Wenn D durch F auf die Teilmenge D' abgebildet wird, so wird auch D' auf D' abgebildet (wie Ü8A3), wir können die Kontraktivität also (D' ist konvex und abgeschlossen) durch Abschätzung (einer geeigneten Norm) von F' auf D' nachweisen.
kontraktiv:
$|.|$ heißt, daß wir von jeder Komponente den Betrag nehmen, $<.$ heißt, daß wir komponentenweise vergleichen; auf D' gilt dann:

$$|F'(x,y)| .<. \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(e^{1.1}e^0 + \frac{1}{0+1}\right) & \frac{1}{8}\left(e^{1.1}e^0\right) \\ \frac{1}{10}\left(1 + \tan\left(\frac{1}{2}2\right)^2\right) & \frac{2}{5}\left|0 - \frac{3}{5}\right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5005 & 0.3755 \\ 0.1376 & 0.2400 \end{pmatrix} =: J_{max}$$

und somit

$$\|J_{max}\|_1 = 0.6381 \quad \text{und} \quad \|J_{max}\|_\infty = 0.8760$$

Wähle 1-Norm. Wir setzen: $\alpha := 0.64$, haben $\varepsilon = 0.01$ vorgegeben und wählen als Startwert $\boldsymbol{x}_0 = (0.1, 0.1)$, voraus

$$\boldsymbol{x}_1 = F(\boldsymbol{x}_0) = (0.13691, 0.06001)$$

folgt. Die a-priori Abschätzung ergibt mit

$$\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|_1 = \|(0.03691, -0.03999)\|_1 = 0.07690$$

$$\|\boldsymbol{x}_n - \overline{\boldsymbol{x}}\|_1 \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|_1 \overset{!}{=} \varepsilon \to \tilde{n} = \frac{\ln(\varepsilon \cdot (1-\alpha)/\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|_1)}{\ln(\alpha)} = 6.8...$$

und somit reichen 7 Iterationen aus, um die geforderte Genauigkeit zu erzielen.

Jetzt zwei Schritte mit dem vereinfachten Newton-Verfahren (ohne LR, da 2×2):

$$f(x,y) := F(x,y) - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to f'(x,y) = F'(x,y) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Startwert ist $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^T$

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{9}{125} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.072 \end{pmatrix} \quad , \quad f'(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}(1+1) - 1 & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{10} & -\frac{6}{25} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.75 & -0.125 \\ 0.1 & -1.24 \end{pmatrix} \to$$

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cc|c} -0.75 & -0.125 & 0.125 \\ 0.1 & -1.24 & 0.072 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -0.75 & -0.125 & 0.125 \\ 0 & -1.25\overline{6} & 0.088\overline{6} \end{array}\right) \to \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -0.154907 \\ -0.0705570 \end{pmatrix} \to$$

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.154907 \\ 0.0705570 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} -0.0009034448 \\ 0.00102671000 \end{pmatrix} \to [A|b] = .. \to \left(\begin{array}{cc|c} -0.75 & -0.125 & -0.0009034448 \\ 0 & -1.25\overline{6} & 0.0009062506934 \end{array}\right) \to$$

$$\Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.001324785 \\ -0.0007211544 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 - \Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.153582376 \\ 0.0712781836 \end{pmatrix}$$