Aufgabe 1: L-R-Zerlegung, Nachiteration.

Teil a)

1. Pivotisierung ergibt:
$$A \to \overline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. L-R-Zerlegung von $\overline{A}$:
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Vorwärtseinsetzen:
$$b \to \overline{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 14 \end{pmatrix}$$
(pivotisierung).
$$Ly = \overline{b}$$
ergibt
$$y = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. Rückwärtseinsetzen:
$$Rx = y$$
ergibt
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Teil b)

1. Die vorhandene L-R-Zerlegung bezieht sich auf das *pivotisierte* Gleichungssystem zu der Matrix $\overline{A}$. Also muss auch das gestörte System pivotisiert werden.
$$\tilde{A} \to \overline{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 9 \\ 2.1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Residuum berechnen:
$$\overline{\tilde{A}}x = \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 14.1 \end{pmatrix}, \qquad r = b - \overline{\tilde{A}}x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.1 \end{pmatrix}.$$

3. Lösen von $\overline{\tilde{A}}\delta = r$ mittels L-R-Zerlegung von $\overline{A}$:
$$Ly = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.1 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.1 \end{pmatrix}; \qquad R\delta = y \Rightarrow \delta = \begin{pmatrix} 0.21 \\ 0.08 \\ -0.1 \end{pmatrix}.$$

4. Berechnung der Näherung:
$$x_1 = x + \delta \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 1.12 \\ 0.08 \\ 1.9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: Lineare Ausgleichsrechnung.

1. Linearisieren mittels $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$:

$$f(x) = ax + \ln(b(x+1)) = ax + \ln(b) + ln(x+1).$$

Die Gleichungen haben also die Form:

$$f(x) - \ln(x+1) = ax + \ln(b).$$

2. Aufstellen des Gleichungssystems (mit $\alpha = a$ und $\beta = \ln(b)$):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \qquad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \ln(2) \\ 3 - \ln(5) \end{pmatrix}.$$

Man hat also (1. und 2. Gleichung vertauscht, um eine Givens-Rotation einzusparen):

$$(A|d) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0.3096 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 4 & 1 & | & 1.3906 \end{pmatrix}$$

3. Givens-Rotationen:

- 1. und 3. Zeile, mit $\tau = 0.25$, $s = 0.97014$ und $c = 0.2459$:

$$Q_{1,3}\,(A|d) = \begin{pmatrix} 4.12311 & 1.21268 & | & 1.42347 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -0.72761 & | & 0.03957 \end{pmatrix}$$

- 2. und 3. Zeile, mit $\tau = -0.72761$, $s = 0.80861$ und $c = -0.58835$:

$$Q_{2,3}Q_{1,3}\,(A|d) = \begin{pmatrix} 4.12311 & 1.21268 & | & 1.42347 \\ 0 & 1.23669 & | & -0.02328 \\ 0 & 0 & | & 0.03200 \end{pmatrix}$$

- Lösen bezüglich α und β:
  Lösen von

$$\begin{pmatrix} 4.12311 & 1.21268 \\ 0 & 1.23669 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.42347 \\ -0.02328 \end{pmatrix}$$

  ergibt

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.3502, \\ \beta &= -0.01882. \end{aligned}$$

- Berechnen von a und b:

$$\begin{aligned} a &= \alpha = 0.3502, \\ b &= e^{\beta} = 0.9814. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Nichtlineares Gleichungssystem.

Teil a)

1. Geeignete Iterationsfunktion finden:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} -\sqrt{10-y} \\ \sqrt{7-x} \end{pmatrix}.$$

2. **V1**. F ist selbstabbildend:
   Die Funktionen $-\sqrt{10-y}, \sqrt{7-x}$ sind (als Funktion von y bzw. x) auf ihren jeweiligen Definitionsgebieten monoton steigend bzw. monoton fallend. Es reicht also aus die Ränder der Intervalle zu betrachten. Man hat

$$F([-3,-2] \times [3,4]) = [-2.6458, -2.4495] \times [3, 3.1623].$$

   F ist also selbstabbildend.

3. **V2**. F ist kontraktiv / Berechnung der Lipschitz-Konstante (da F stetig differenzierbar und $[-3,-2]\times[3,4]$ konvex):

$$DF = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{10-y}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{7-x}} & 0 \end{pmatrix}.$$

   Mit 1- oder ∞-Norm hat man daß

$$L = \max\{|\frac{1}{2\sqrt{9}}|, |\frac{1}{2\sqrt{6}}|\} = 0.2041 < 0.205$$

   ist.

   Es gilt also $L < 1$, und somit ist F kontraktiv.

4. Einen Schritt Fixpunktiteration:
   Mit dem Startwert

$$x_0 = \begin{pmatrix} -2.5 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

   gelangt man zu

$$x_1 = F(x_0) = \begin{pmatrix} -2.5495 \\ 3.0822 \end{pmatrix}.$$

5. Wieviele Iterationen..?
   Aus

$$\frac{L^k}{1-L}||x_1 - x_0|| \leq \epsilon$$

   erhalten wir

$$\frac{\ln\left(\frac{\epsilon(1-L)}{||x_1-x_0||}\right)}{\ln(L)} \leq k.$$

   Und da $||x_1 - x_0||_\infty = 0.4178$ und $\epsilon = 0.005$, gilt

$$k \geq 2.9\ldots \quad .$$

   Es werden also maximal 3 iterationen benötigt, um die vorgegebene Genauigkeit zu erreichen.

6. A-posteriori Fehlerabschätzung:

$$||x_1 - x^*|| < \frac{L}{1-L}||x_1 - x_0|| = 0.1071.$$

Teil b)

1. Einen Schritt des Newton-Iterationsverfahrens aufbauen:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y - 10 \\ x + y^2 - 7 \end{pmatrix}.$$

Jacobische:

$$Df = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}.$$

Aus

$$x_2 = x_1 - (Df(x_1))^{-1} f(x_1)$$

und

$$\delta = x_2 - x_1$$

ergibt sich

$$Df(x_1)\delta = -f(x_1).$$

2. Numerische Durchführung des Newton-Schrittes:

$$Df(x_1) = \begin{pmatrix} -5.099 & 1 \\ 1 & 6.1644 \end{pmatrix}; \qquad -f(x_1) = \begin{pmatrix} -0.41779 \\ -0.0495 \end{pmatrix}.$$

$$\delta = \begin{pmatrix} -0.07788 \\ 0.02067 \end{pmatrix},$$

$$x_2 = x_1 + \delta = \begin{pmatrix} -2.6274 \\ 3.1029 \end{pmatrix}.$$

Teil c)

1. Einen weiteren Fixpunktiterationsschritt durchführen:

$$x_3 = F(x_2) = \begin{pmatrix} -2.6262 \\ 3.1028 \end{pmatrix}.$$

2. A-posteriori Fehlerabschätzung:

$$||x_3 - x^*|| < \frac{L}{1-L} ||x_3 - x_2|| = 0.0002977.$$

Aufgabe 4: Interpolation.

Teil a)

1. Näherung durch Neville-Aitken-Schema berechnen:
   Das Neville-Aitken-Schema zur spaltenweisen Berechnung lautet ($N_{i,1} := f_i$)

$$N_{i,j+1} = N_{i+1,j} + \frac{x_{i+j} - \overline{x}}{x_{i+j} - x_i} \left(N_{i,j} - N_{i+1,j} \right)$$

   und ergibt dann

x_i	$N_{i,1}$	$N_{i,2}$	$N_{i,3}$	$N_{i,4}$
0	0	0.2980	0.2951	0.2955
0.1	0.1987	0.2941	0.2960	
0.2	0.3894	0.3018		
0.3	0.5646			

   Somit erhalten wir $\sin(2 \times 0.15) \approx 0.2955$.

2. Fehlerabschätzung:
   Es gilt

$$|f(0.15) - P(f|0, 0.1, 0.2, 0.3)| = |x(x-0.1)(x-0.2)(x-0.3)\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}|$$

   für ein $\xi \in (0, 0.3)$. Ferner gilt

$$f^{(4)}(x) = 16 \sin(2x).$$

   Die Funktion $f^{(4)}$ ist in $(0, 0.3)$ monoton steigend. Mit $\xi = 0.3$ gilt also

$$|f(0.15) - P(f|0, 0.1, 0.2, 0.3)| \leq |x(x-0.1)(x-0.2)(x-0.3)\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}| = 2.1174 \times 10^{-5}.$$

Teil b)

1. Stützstellen für möglichst gute Näherung:
   Zur Wahl der Stützstellen betrachten wir die Fehlerabschätzung vorab:
   Mit $a := \min\{x_0, .., x_3, \overline{x}\}$, $b := \max\{x_0, .., x_3, \overline{x}\}$ gilt:

$$|f(\overline{x}) - p_3(\overline{x})| \leq \frac{1}{4!} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(4)}(\xi) \right| \prod_{i=0}^{3} |\overline{x} - x_i|$$

   Dabei ist $f^{(4)}(\xi) = 16 \sin(2\xi)$. Wegen dieser Fehlerabschätzung wählen wir zur Approximation von $f(0.05)$ die Stützstellen $-0.1, 0, 0.1, 0.2$ (den Wert für $x = -0.1$ erhalten wir über Symmetrie: $\sin(x) = -\sin(-x)$).

2. Berechnung der Koeffizienten des Newton-Interpolationspolynomes über dividierte Differenzen:

-0.1	-0.1987	1.9870	0	-1.3333
0	0	1.9870	-0.4	
0.1	0.1987	1.907		
0.2	0.3894			

3. Aufstellen und Auswerten des Interpolationspolynoms:

$$P(f|-0.1, 0, 0.1, 0.2) = -0.1987 + 1.987(x+0.1) - 1.33(x+0.1)x(x-0.1),$$

   so daß man

$$f(0.05) \approx 0.0998$$

   hat.

4. Fehlerabschätzung:
   Es gilt

$$|f(0.15) - P(f|-0.1, 0, 0.1, 0.2)| = |(x+0.1)x(x-0.1)(x-0.2)\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}|.$$

   In diesem Fall nimmt man $\xi = 0.2$ für die Fehlerabschätzung. Daraus ergibt sich

$$|f(0.15) - P(f|-0.1, 0, 0.1, 0.2)| \leq 1.4603 \times 10^{-5}.$$