Aufgabe 1

Mit Hilfe der dritten binomischen Formel gilt

$$a = \left(2-\sqrt{3}\right)^4 = \left(\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)}\right)^4 = \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^4} = b,$$

also die Gleichheit der beiden Terme.

Aufgabe 1a

Wir fassen a und b nun als Auswertung geeigneter Funktionen $f(x)$ bzw. $g(x)$ an der Stelle $x = \sqrt{3}$ auf:

$$f(x) = (2-x)^4\,, \qquad g(x) = \frac{1}{(2+x)^4}$$

mit den Ableitungen

$$f'(x) = -4\,(2-x)^3\,, \qquad g'(x) = \frac{-4}{(2+x)^5}.$$

In erster Näherung gilt nun die Fehlerfortpflanzungsformel

$$\left|\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(x)}\right| \doteq \kappa_f(x)\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right|, \qquad \left|\frac{g(x)-g(\tilde{x})}{g(x)}\right| \doteq \kappa_g(x)\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right|$$

mit den relativen Konditionszahlen

$$\kappa_f(x) = \left|\frac{f'(x)\,x}{f(x)}\right| = \left|\frac{4\,x}{2-x}\right|, \qquad \kappa_g(x) = \left|\frac{g'(x)\,x}{g(x)}\right| = \left|\frac{4\,x}{2+x}\right|.$$

Für $x = \sqrt{3}$ und $\tilde{x} = 1.7$ erhalten wir für den relativen Eingabefehler $\delta_x := |(x-\tilde{x})/x|$ und die Konditionszahlen

$$\delta_x = 0.018505, \qquad \kappa_f\left(\sqrt{3}\right) = 25.856, \qquad \kappa_g\left(\sqrt{3}\right) = 1.8564,$$

und damit für den relativen Fehler in f bzw. g

$$\left|\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(x)}\right| \doteq 0.47847, \qquad \left|\frac{g(x)-g(\tilde{x})}{g(x)}\right| \doteq 0.034353.$$

Also können wir sowohl an den Konditionszahlen als auch an den relativen Fehlern von f und g ablesen, da"s das bessere Ergebnis mit der Auswertung von b zu erwarten ist.

$\boxed{2}$

Aufgabe 1b

Nun werten wir die Ausdrücke a und b mit dem Näherungswert $\sqrt{3} \approx 1.7$ in 4stelliger Gleitpunktarithmetik aus:

$$\begin{aligned} a &= \left(2-\sqrt{3}\right)^4 \approx (2.000-1.700)^4 = 0.3000^4 = 0.8100\cdot 10^{-2}, \\ b &= \frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^4} \approx \frac{1}{(2.000+1.700)^4} = \frac{1}{3.700^4} = \frac{1}{187.4} = 0.5336\cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Dann beträgt der relative Fehler zu dem auf 4 Stellen genauen Wert $w := 0.5155 \cdot 10^{-2}$

$$\left|\frac{w-a}{w}\right| = 0.57129, \qquad \left|\frac{w-b}{w}\right| = 0.35112 \cdot 10^{-1}.$$

$\boxed{1.5}$

Aufgabe 1c

Ausgangspunkt für eine Verbesserung ist die Variante b. Ausmultiplizieren des Nenners mit der binomischen Formel ergibt

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^4 = \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} 2^i \left(\sqrt{3}\right)^{4-i} = 9 + 24\sqrt{3} + 72 + 32\sqrt{3} + 16 = 97 + 56\sqrt{3}.$$

Damit ergibt sich als äquivalente Umformung

$$c := \frac{1}{97 + 56\sqrt{3}},$$

was wiederum als Auswertung einer Funktion h an der Stelle $x = \sqrt{3}$ aufgefa"st werden kann mit

$$h(x) = \frac{1}{97 + 56\,x}, \qquad h'(x) = \frac{-56}{(97 + 56\,x)^2}.$$

Also ist die relative Kondition gegeben durch

$$\kappa_h(x) = \left|\frac{h'(x)\,x}{h(x)}\right| = \left|\frac{56\,x}{97 + 56\,x}\right|, \qquad \kappa_h\left(\sqrt{3}\right) = 0.49999,$$

und damit der relative Fehler von h

$$\left|\frac{h(x) - h(\tilde{x})}{h(x)}\right| \doteq 0.92520 \cdot 10^{-2}.$$

Auswertung des Ausdrucks c in 4stelliger Gleitpunktarithmetik ergibt

$$c = \frac{1}{97 + 56\sqrt{3}} \approx \frac{1}{97.00 + 56.00 \cdot 1.700} = \frac{1}{97.00 + 95.20} = \frac{1}{192.2} = 0.5203 \cdot 10^{-2}$$

mit dem relativen Fehler

$$\left|\frac{w-c}{w}\right| = 0.93113 \cdot 10^{-2}.$$

$\boxed{1.5}$

Aufgabe 2

Nullstellenproblem $F(x,y)=0$ mit

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-2 \\ e^y+\ln(x)-1 \end{pmatrix}$$

Newtonverfahren:

$$F'(x^{(n)},y^{(n)})\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = -F(x^{(n)},y^{(n)})$$

$$\begin{pmatrix} x^{(n+1)} \\ y^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

Hier, zwei Schritte $vereinfachtes$ Newtonverfahren, also für $n=0,1$:

$$(*) \qquad \begin{cases} F'(x^{(0)},y^{(0)})\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = -F(x^{(n)},y^{(n)}) \\ \begin{pmatrix} x^{(n+1)} \\ y^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(n)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Bestimmung der Ableitung am Startwert $(x^{(0)},y^{(0)})=(1,1)$:

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1/x & e^y \end{pmatrix} \quad , \quad F'(x^{(0)},y^{(0)}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & e \end{pmatrix}$$

$\boxed{1.5}$

LR-Zerlegung von $F'(x^{(0)},y^{(0)})$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0.5 & e-1 \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & e-1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1.718 \end{pmatrix}$$

$\boxed{1.5}$

$(*)$ für $n=0$, mit LR-Zerlegung lösen:

$$F(x^{(0)},y^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ e-1 \end{pmatrix} \Rightarrow LRs = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-e \end{pmatrix} \Rightarrow Rs = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-e \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{1.5}$

$(*)$ für $n=1$, mit LR-Zerlegung lösen:

$$F(x^{(1)},y^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 \\ \ln(2) \end{pmatrix} \Rightarrow LRs = \begin{pmatrix} -2 \\ -\ln(2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2 \\ -0.6931 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Rs = \begin{pmatrix} -2 \\ 1-\ln(2) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2 \\ 0.3069 \end{pmatrix} \Rightarrow s \approx \begin{pmatrix} -1.179 \\ 0.1786 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^{(2)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.179 \\ 0.1786 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.821 \\ 0.1786 \end{pmatrix}$$

$\boxed{1.5}$

Aufgabe 3a

klassisches Runge-Kutta:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t^n, y^n) \\ k_2 &= f(t^n + \frac{h}{2}, y^n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= f(t^n + \frac{h}{2}, y^n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 &= f(t^n + h, y^n + hk_3) \\ y^{n+1} &= y^n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Hier:

$$f(t,y) = y + \frac{2t}{y}\,, \quad t^0 = -1\,, \quad y^0 = -1\,, \quad h = 0.2$$

Ein Schritt ergibt Näherung für $y(-0.8)$:

$$k_1 = -1 + \frac{-2}{-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad t^0 + \frac{h}{2} = -0.9\,, \quad y^0 + \frac{h}{2}k_1 = -0.9$$

$$k_2 = -0.9 + \frac{-2 \cdot 0.9}{-0.9} = 1.1 \quad \Rightarrow \quad t^0 + \frac{h}{2} = -0.9\,, \quad y^0 + \frac{h}{2}k_2 = -0.89$$

$$k_3 = -0.89 + \frac{-2 \cdot 0.9}{-0.89} \approx 1.132 \quad \Rightarrow \quad t^0 + h = -0.8\,, \quad y^0 + hk_3 \approx -0.7736$$

$$k_4 = -0.7736 + \frac{-2 \cdot 0.8}{-0.7736} \approx 1.295$$

$$y^1 = -1 + \frac{0.2}{6}(1 + 2 \cdot 1.1 + 2 \cdot 1.132 + 1.295) \approx -0.7747$$

$\boxed{2.5}$

Aufgabe 3b

Trapezmethode ergibt hier

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = \frac{1}{2}\left(y^{n+1} + \frac{2t^{n+1}}{y^{n+1}} + y^n + \frac{2t^n}{y^n}\right)$$

D.h. mit

$$t^0 = -1\,, \quad y^0 = -1\,, \quad h = 0.2$$

für y^1 die Gleichung

$$5(y^1 + 1) = \frac{1}{2}\left(y^1 - \frac{1.6}{y^1} - 1 + 2\right)$$

$$\Rightarrow \quad 9(y^1)^2 + 9y^1 + 1.6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y^1 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1.6}{9}} \approx -0.5 \pm 0.2687 = \begin{cases} -0.2313 \\ -0.7687 \end{cases}$$

Da -0.7687 näher bei y^0 liegt als -0.2313, ist $y^1 = -0.7687$ die gesuchte Näherung für $y(-0.8)$.

$\boxed{2.5}$

Aufgabe 4a

Das Interpolationspolynom in Newtondarstellung zu den Stützstellen $x_i = 0, 1, 2$ ist zu bestimmen; die Koeffizienten der Newtondarstellung erhält man über den Algorithmus

$$[x_i]f \;:=\; f_i\,, \quad [x_j,...,x_k]f \;:=\; \frac{[x_{j+1},...,x_k]f - [x_j,...,x_{k-1}]f}{x_k - k_j}$$

aus dem Schema

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_i & [x_i]f & & [x_i,x_{i+1}]f & & [x_i,x_{i+1},x_{i+1}]f \\
\hline
0 & -3 & & & & \\
 & & > & 4 & & \\
1 & 1 & & & > & -3/2 \\
 & & > & 1 & & \\
2 & 2 & & & &
\end{array}$$

Newtondarstellung: $\quad p(x) \;=\; -3 \;+\; 4x \;-\; \frac{3}{2}x(x-1)$

$\boxed{2}$

Aufgabe 4b

Das Interpolationspolynom p zu den Stützstellen $x_i = 1, 2, 4$ ist bei $x = 3$ auszuwerten; den Wert erhält man über den Neville-Aitken Algorithmus

$$P_{i,0} \;:=\; f_i\,, \quad P_{i,k} \;:=\; P_{i,k-1} + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-k}}(P_{i-k,k-1} - P_{i,k-1})$$

aus dem Schema

$$\begin{array}{c|ccc}
x_i & P_{i,0} & P_{i,1} & P_{i,2} \\
\hline
1 & 1 & & \\
2 & 2 & 3 & \\
4 & 7 & 9/2 & 4
\end{array}
\qquad \Rightarrow \qquad p(3) \;=\; P_{2,2} \;=\; 4$$

$\boxed{2}$