Aufgabe 1: Cholesky Verfahren, s.p.d-Matritzen.

Teil a)

1. Cholesky-Verfahren:

$$d_{11} = 1,$$
$$l_{21} = 2,$$
$$l_{31} = 2;$$

$$d_{22} = 6 - 2^2 * 1 = 2,$$
$$l_{32} = (4 - 2 * 2 * 1)/2 = 0;$$

$$d_{33} = (8 - \alpha^2) - 2^2 * 1 - 0^2 * 2 = 4 - \alpha^2.$$

2. L-D-L^T-Zerlegung von A:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

3. Einschränkungen für α:
   Aus
   $$4 - \alpha^2 > 0$$
   erhält man
   $$2 > |\alpha|$$
   Also muss $\alpha \in (-2, 2)$ sein, damit A positiv-definit ist.

Teil b)
Determinante von A:

$$\det A = 8 - 2 * \alpha^2$$

Teil c)
Lösung des Gleichungssystems:

$$Lz = b$$

ergibt

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$Dy = z$$

ergibt

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

$$L^T x = y$$

ergibt

$$x = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

Teil d)
$A^T A$ nicht positiv definit:
Wenn $\alpha \in \{-2, 2\}$ ist, dann folgt aus der Betrachtung von D, daß $\det A = 0$ ist und somit daß A singulär ist. Daraus schliesst man daß $A^T A$ auch singulär ist und somit nicht positiv definit.

Aufgabe 2: Quadratur/Interpolation.

Teil a)

1. Wert von $\max_{\xi\in[0,1]}|f^{(2)}(\xi)|$:
   Wir schreiben $f(x) = \sin(x^2)$ und haben somit
   $$f^{(2)}(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2),$$
   und
   $$f^{(3)}(x) = -8\cos(x^2)x^3 - 12\sin(x^2)x$$
   Es gilt $f^{(3)}(x) \le 0$, also ist $f^{(2)}$ monoton fallend. Man muss also $f^{(2)}$ nur an den Intervallenden untersuchen. Wir erhalten
   $$f^{(2)}(0) = 2$$
   und
   $$f^{(2)}(1) = -2.28528,$$
   womit dann
   $$\max_{\xi\in[0,1]}|f^{(2)}(\xi)| = 2.28528.$$
2. Anzahl der Schritte mit der summierten Mittelpunktsregel:
   man setzt
   $$\frac{1}{24}\frac{(b-a)^3}{n^2}\max_{\xi\in[0,1]}|f^{(2)}(\xi)| \le 7.5 * 10^{-4}$$
   und bekommt
   $$n \ge \sqrt{\frac{2.28528}{7.5 * 10^{-4} * 24}} = 11.26$$
3. Mit der summierten Trapezregel:
   $$\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}\max_{\xi\in[0,1]}|f^{(2)}(\xi)| \le 7.5 * 10^{-4}$$
   $\Rightarrow$
   $$n \ge \sqrt{\frac{2.28528}{7.5 * 10^{-4} * 12}} = 15.93$$
4. Anzahl der Schritte mit der summierten Simpsonregel:
   $$\frac{1}{2880}\frac{(b-a)^5}{n^4}\max_{\xi\in[0,1]}|f^{(4)}(\xi)| \le 7.5 * 10^{-4}$$
   $\Rightarrow$
   $$n \ge \sqrt{\frac{29}{7.5 * 10^{-4} * 2880}} = 1.91$$

Teil b)
Summierte Simpsonregel, zwei Teilintervalle:

$$I \approx \frac{h}{6}(\sin(0^2) + 4\sin[(1/4)^2] + 2\sin[(1/2)^2] + 4\sin[(3/4)^2] + \sin[(1)^2])$$

also

$$I \approx 0.309944.$$

Teil c)
Näherung durch Neville-Aitken-Schema berechnen:
Das Neville-Aitken-Schema zur spaltenweisen Berechnung lautet ($N_{i,1} := f_i$)

$$N_{i,j+1} = N_{i+1,j} + \frac{x_{i+j} - \overline{x}}{x_{i+j} - x_i}\,(N_{i,j} - N_{i+1,j})$$

und ergibt dann für $\overline{x} = 2$ (beachte: Stützstellen für möglichst gute Interpolation)

x_i	$N_{i,1}$	$N_{i,2}$	$N_{i,3}$	$N_{i,4}$
1.25	0.410486	0.301472	0.30961775	0.310144
1.75	0.337810	0.312333	0.31067025	
2.25	0.286856	0.305682		
2.75	0.249204			

Somit erhalten wir $I(2) \approx 0.310144$.

Aufgabe 3: Nichtlinearer Ausgleich.

$$y(t) = C\,e^{-\lambda\,t}$$

Eine Zeile der Jakobischen für das Gauss-Newtonverfahren (Gradient) plus rechter Seite:

$$z = \left(e^{-\lambda\,t} \quad -C\,t\,e^{-\lambda\,t} \quad | \quad y_i - C\,e^{-\lambda\,t}\right)$$

Dies führt mit den Startwerten

$$C_0 = 10 \quad \lambda_0 = 1$$

zu folgender Zeile des (lin.) Gleichungssytems mit rechter Seite:

$$J_i = \left(e^{-t_i} \quad -10\,t_i\,e^{-t_i} \ | \ y_i - 10\,e^{-t_i}\right)$$

Einsetzen der Meßwerte:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} e^{-1} & -10\,e^{-1} & | & 4 - 10\,e^{-1} \\ e^{-2} & -20\,e^{-2} & | & 1 - 10\,e^{-2} \\ e^{-3} & -30\,e^{-3} & | & \frac{1}{2} - 10\,e^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .36788 & -3.6788 & | & .32121 \\ .13534 & -2.7067 & | & -.35335 \\ .049787 & -1.4936 & | & .0.0021293 \end{pmatrix}$$

führt zu den Normalgleichungen $\left(A^T A | A^T b\right)$:

$$\begin{pmatrix} .15613 & -1.7940 & | & .070450 \\ -1.7940 & 23.091 & | & -.22841 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1.7940 & 23.091 & | & -.22820 \\ 0 & .21549 & | & .050572 \end{pmatrix}$$

$$\to \Delta_x = \begin{pmatrix} 3.1479 \\ .23468 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.148 \\ 1.2347 \end{pmatrix}$$

$$y(t) \approx C_1\,e^{-\lambda_1\,t} = 13.148\,e^{-1.2347\,t}$$

Residuum

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(y\left(t_i\right) - y_i\right)^2} = .27275$$

Aufgabe 4: Nichtlineares Gleichungssystem.

a) Newton-Verfahren

$$f'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x-3y & -3x \\ 5y & -4y+5x \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & | & 3 \\ 5 & 6 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 6 & | & 4 \\ 0 & -7.2 & | & 2.2 \end{pmatrix}$$

(gerechnet wurde hier mit Pivotisierung, was gem. Aufgabenstellung keine Pflicht ist)

$$\Rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1.1667 \\ -.30556 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 - \Delta\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} .83333 \\ 1.3056 \end{pmatrix}$$

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} 2.4306 \\ -1.9691 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\boldsymbol{x}_1) = \begin{pmatrix} -2.25 & -2.5 \\ 6.5278 & -1.0556 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -2.25 & -2.5 & | & 2.4306 \\ 6.5278 & -1.0556 & | & -1.9691 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6.5278 & -1.0556 & | & -1.9691 \\ 0 & -2.8638 & | & 1.7518 \end{pmatrix}$$

(gerechnet wurde wieder mit Pivotisierung, was keine Pflicht ist)

$$\Rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -.40057 \\ -.61171 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 - \Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1.2339 \\ 1.9173 \end{pmatrix}$$

b) vereinfachtes Newton-Verfahren ($\boldsymbol{x}_1$ und $A = f'(\boldsymbol{x}_0)$ sowie $f(\boldsymbol{x}_1)$ aus a))

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$$

(auch die L-R-Zerlegung ist gem. Aufgabenstellung nicht zwingend (bei nur einem weiteren Schritt), Gaußelimination wird auch akzeptiert)

$$\rightarrow \boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 2.4306 \\ -14.122 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} .076903 \\ -.39228 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} .75643 \\ 1.6978 \end{pmatrix}$$