Numa–Klausur (DPO ’99) Juli 2001: Aufgabe 1 (linearer Ausgleich)

(vgl. Aufgabe 4.17 und 4.10)

Aufgabe 1 (1 + 4.5 + 1)

Gegeben seien die Daten

t_i	-1	0	1	2
y_i	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5

Theoretischen Überlegungen zufolge genügen diese der Darstellung

$$y(t) = \alpha + \beta\, t^2.$$

a) Wie ist die *least–squares*–Lösung für dieses Problem definiert?

b) Bestimmen Sie die *least–squares*–Lösung mit Hilfe der QR–Zerlegung und benutzen Sie dabei Householder–Spiegelungen. Gehen Sie **nicht** zu den Normalgleichungen über.

Hinweis: Rechnen Sie weitestgehend mit Brüchen.

c) Wie groß ist das Residuum?

Teil a) Die *least–squares*–Lösung ist definiert als $x^* = (\alpha^*, \beta^*)$ mit

$$\|A\,x^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^2} \|A\,x - b\|_2\,, \qquad \boxed{0.5}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 5 \end{pmatrix}. \qquad \boxed{0.5}$$

(Damit werden die Quadrate der Fehler, also der Term

$$\sum_{i=0}^{3} (y(t_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{3} (\alpha + \beta\, t_i^2 - y_i)^2,$$

minimiert.)

Teil b) Zunächst hängen wir die rechte Seite an die Matrix an und erhalten

$$A_0 = (a_1, a_2, a_3) := (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 4 & 5 \end{array}\right).$$

Es sind zwei Householder–Schritte nötig, um A auf obere Dreiecksgestalt zu bringen. Für den ersten Schritt setzen wir

$$y := a_1 = (1,1,1,1)^T, \qquad \sigma := \|y\|_2^2 = y^T y = 4.$$

Damit erhalten wir mit dem ersten Einheitsvektor $e^1 = (1,0,0,0)^T$

$$\alpha := \operatorname{sgn}(y_1)\|y\|_2 = 2, \qquad v_1 := y + \alpha\, e^1 = (3,1,1,1)^T$$

sowie

$$v_1^T v_1 = 2\,(y^T y + |y_1|\,\|y\|_2) = 12, \qquad \beta_1 := \frac{2}{v_1^T v_1} = \frac{1}{6}.$$

Die Matrix $Q_{v_1} = I - \beta_1\, v_1 v_1^T$ muß nicht explizit berechnet werden, sondern wir berechnen $Q_{v_1}A_0$ spaltenweise. Da $a_1 = y$, gilt ohne weiteres Rechnen (siehe Skript S. 61, Formel (3.7.29)):

$$Q_{v_1}a_1 = Q_{v_1}y = -\alpha\, e^1 = (-2,0,0,0)^T.$$

$\boxed{1.0}$

Für die anderen beiden Spalten erhalten wir

$$\begin{aligned} v_1^T a_2 &= 8, & Q_{v_1}a_2 &= a_2 - \beta_1 v_1 (v_1^T a_2) &= a_2 - \tfrac{1}{6}\cdot 8 \cdot v_1 &= \left(-3, -\tfrac{4}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{8}{3}\right)^T, \\ v_1^T a_3 &= 13, & Q_{v_1}a_3 &= a_3 - \beta_1 v_1 (v_1^T a_3) &= a_3 - \tfrac{1}{6}\cdot 13 \cdot v_1 &= \left(-\tfrac{9}{2}, -\tfrac{5}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{17}{6}\right)^T, \end{aligned}$$

und somit

$$Q_{v_1}A_0 = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & -\frac{9}{2} \\ 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{17}{6} \end{array}\right).$$

$\boxed{1.0}$

Für den zweiten Householder–Schritt können wir die erste Zeile und die erste Spalte von $Q_{v_1}A_0$ streichen und setzen

$$A_1 = (a_1, a_2) := \left(\begin{array}{c|c} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{17}{6} \end{array}\right).$$

Wir beginnen wiederum mit der ersten Spalte und setzen

$$y := a_1 = (-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{8}{3})^T, \qquad \sigma := \|y\|_2^2 = y^T y = 9.$$

Dann erhalten wir mit dem ersten Einheitsvektor $e^1 = (1,0,0)^T$

$$\alpha := \operatorname{sgn}(y_1)\|y\|_2 = -3, \qquad v_2 := y + \alpha\, e^1 = (-\frac{13}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{8}{3})^T$$

und

$$v_2^T v_2 = 2\,(y^T y + |y_1|\,\|y\|_2) = 26, \qquad \beta_2 := \frac{2}{v_2^T v_2} = \frac{1}{13}.$$

Auch hier berechnen wir $Q_{v_2}A_1$ spaltenweise mit

$$Q_{v_2}a_1 = Q_{v_2}y = -\alpha\, e^1 = (3,0,0)^T$$

$\boxed{1.0}$

sowie

$$v_2^T a_2 = 15, \quad Q_{v_2}a_2 = a_2 - \beta_2 v_2 (v_2^T a_2) = a_2 - \frac{1}{13}\cdot 15 \cdot v_2 = \left(\frac{10}{3}, -\frac{11}{39}, -\frac{19}{78}\right)^T$$

und somit

$$Q_{v_2} A_1 = \left(\begin{array}{c|c} 3 & \frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{11}{39} \\ 0 & -\frac{19}{78} \end{array} \right).$$

$\boxed{0.5}$

Damit ist A auf obere Dreiecksgestalt gebracht mit

$$Q_{v_2} Q_{v_1} A = \left(\begin{array}{cc} -2 & -3 \\ 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) =: \left(\begin{array}{c} R \\ \hline 0 \end{array} \right), \qquad Q_{v_2} Q_{v_1} b = \left(\begin{array}{c} -\frac{9}{2} \\ \frac{10}{3} \\ \hline -\frac{11}{39} \\ -\frac{19}{78} \end{array} \right) =: \left(\begin{array}{c} \tilde{b} \\ \hline \hat{b} \end{array} \right).$$

Die *least–squares*–Lösung $x^* = (\alpha^*, \beta^*)^T$ ergibt sich nun aus dem linearen 2×2–Gleichungssystem $R\,x^* = \tilde{b}$, das wir durch Rückwärtseinsetzen lösen können. Wir erhalten

$$x^* = \begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{10}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.58333 \\ 1.1111 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{1.0}$

Also ist die Funktion mit den gemäß der Gauß'schen Fehlerquadratmethode optimalen Parametern gegeben durch

$$y(t) = \frac{7}{12} + \frac{10}{9}\,t^2.$$

Teil c) Das Residuum berechnet sich als die Euklidische Norm aus den verbliebenen zwei Komponenten von $Q_{v_2}\,Q_{v_1}\,b$, also

$$\text{res} := \left\| \hat{b} \right\|_2 = \sqrt{\left(\frac{-11}{39}\right)^2 + \left(\frac{-19}{78}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{6} = 0.37268.$$

$\boxed{1.0}$

Numa–Klausur (DPO '99) Juli 2001: Aufgabe 2 (Fixpunkt– und Nullstellenproblem)

(vgl. Aufgabe 5.1 und 5.2)

Aufgabe 2 (1 + 1 + 2)

Gegeben sei die Fixpunktgleichung

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin^2(x)\,,$$

wobei das Sinusargument im Bogenmaß zu nehmen ist.

a) Zeigen Sie, daß die zugehörige Fixpunktiteration für jeden Startwert aus $\mathbb{R}$ konvergiert.

b) Führen Sie mit dem Startwert $x_0 = 7.5$ zwei Fixpunktiterationen durch.

c) Führen Sie mit demselben Startwert zwei Iterationen des Newton–Verfahrens durch, um die Lösung der obigen Fixpunktgleichung zu finden.

Teil a) Wir wenden den Banach'schen Fixpunktsatz an auf

$$\Phi(x) := \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin^2(x), \qquad x \in D := \mathbb{R}.$$

Dazu sind folgende drei Punkte nachzuweisen:

(i) D ist vollständig bzw. abgeschlossen,

(ii) Φ ist selbstabbildend,

(iii) Φ ist kontraktiv.

Da $D = \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ abgeschlossen bzw. vollständig ist, ist für (i) und (ii) nichts weiter zu zeigen (aber es sollte wenigstens erwähnt werden!). $\boxed{0.5}$

Für (iii) betrachten wir die Ableitung

$$\begin{aligned}\Phi'(x) \quad &= \quad \frac{1}{4}\cdot 2\,\sin(x)\,\cos(x) \;=\; \frac{1}{2}\,\sin(x)\,\cos(x)\\ \Big(= \quad &\frac{1}{4}\sin(2\,x) \qquad \text{mit Additionstheorem}\Big)\end{aligned}$$

Dann gilt

$$L := \max_{x\in D}|\Phi'(x)| = \frac{1}{2}\max_{x\in D}|\sin(x)\,\cos(x)| \le \frac{1}{2}\max_{x\in D}|\sin(x)|\,\max_{x\in D}|\cos(x)| = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2} < 1.$$

$\boxed{0.5}$

(Einen noch besseren Wert würde man mit

$$\tilde{L} := \max_{x\in D}|\Phi'(x)| = \frac{1}{4}\max_{x\in D}|\sin(2\,x)| = \frac{1}{4} < L < 1.$$

erhalten.)

Teil b) Wir wenden zwei Schritte der Fixpunkt–Iteration

$$x_0 := 7.5, \qquad x_{k+1} := \Phi(x_k),\ k = 0, 1, \ldots$$

an und erhalten

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin^2(x_0) &&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin^2(7.5) &&= 0.71996, \\ x_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin^2(x_1) &&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin^2(0.71996) &&= 0.60869, \end{aligned}$$

$\boxed{0.5+0.5}$

wobei darauf zu achten ist, daß die Argumente der Sinusfunktion im Bogenmaß zu nehmen sind.

Teil c) Um das Newton–Verfahren anwenden zu können, müssen wir zunächst die Fixpunktgleichung $\Phi(x) = x$ umschreiben auf ein Nullstellenproblem:

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin^2(x) - x =: f(x) \qquad \boxed{0.5}$$

mit der Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sin(x)\,\cos(x) - 1 \left(= \frac{1}{4}\sin(2\,x) - 1 \right).$$

Dann lautet das Newton–Verfahren

$$x_0 := 7.5, \qquad x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin^2(x_k) - x_k}{\frac{1}{2}\sin(x_k)\ \cos(x_k) - 1},\ k = 0, 1, \ldots.$$

$\boxed{0.5}$

Das Ergebnis der ersten zwei Schritte lautet dann

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} &= -0.59626, \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} &= 0.35730. \end{aligned}$$

$\boxed{0.5+0.5}$

Numa–Klausur (DPO '99) Juli 2001: Aufgabe 3 (Anfangswertproblem)
(vgl. Aufgabe 8.2)

Aufgabe 3 (1 + 3.5 + 1)
Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'''(t) - \left(t + \frac{1}{2}\right) y(t) - (t+4)\, y'(t) = 0 \qquad \text{für } t \in [1, 3/2]$$

mit den Anfangswerten

$$y(1) = 1, \qquad y'(1) = -\frac{3}{2}, \qquad y''(1) = 0.$$

a) Formen Sie die Differentialgleichung in ein System 1. Ordnung um, und bestimmen Sie die zugehörigen Anfangswerte.

b) Lösen Sie das resultierende Problem näherungsweise mit der Trapezmethode zur Schrittweite $h = 1/2$. Dabei auftretende lineare Gleichungssysteme sollen mit der LR–Zerlegung (ohne Pivotisierung) gelöst werden.

c) Geben Sie eine Näherung für $y'''(3/2)$ an.

Teil a) Ein äquivalentes Differentialgleichungssystem besteht aus drei Komponenten, wobei wir die Substitution $z_i(t) := y^{(i-1)}(t),\ i = 1, 2, 3,$ verwenden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
z_1'(t) &= y'(t) = z_2(t),\\
z_2'(t) &= y''(t) = z_3(t),\\
z_3'(t) &= y'''(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right) y(t) + (t+4)\, y'(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right) z_1(t) + (t+4)\, z_2(t).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $z(t) := (z_1(t), z_2(t), z_3(t))^T$ das DGL–System

$$z'(t) = f(t, z(t))$$

mit

$$f(t, z(t)) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ (t + 1/2)\ z_1(t) + (t+4)\, z_2(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t + 1/2 & t+4 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A(t)} z(t).$$

$\boxed{0.5}$

Die Anfangswerte transformieren sich gemäß

$$\begin{aligned}
z_1(1) &= y(1) = 1\\
z_2(1) &= y'(1) = -3/2 \qquad \Longrightarrow \qquad z_1(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix}.\\
z_3(1) &= y''(1) = 0
\end{aligned}$$

$\boxed{0.5}$

Teil b) Die Trapezmethode lautet

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n + \frac{h}{2}\Big(f(t_n, z^n) + f(t_{n+1}, z^{n+1})\Big) \\ &= z^n + \frac{h}{2}\Big(A(t_n)\, z^n + A(t_{n+1})\, z^{n+1}\Big) \\ \Longleftrightarrow \qquad \left(I_3 - \frac{h}{2}\,A(t_{n+1})\right) z^{n+1} &= \left(I_3 + \frac{h}{2}\,A(t_n)\right) z^n, \end{aligned}$$

wobei I_3 die dreidimensionale Einheitsmatrix ist. Eingesetzt und zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & -h/2 & 0 \\ 0 & 1 & -h/2 \\ -h\,(t_{n+1}+1/2)/2 & -h\,(t_{n+1}+4)/2 & 1 \end{pmatrix} z^{n+1} \\ &\qquad = \begin{pmatrix} 1 & h/2 & 0 \\ 0 & 1 & h/2 \\ h\,(t_n+1/2)/2 & h\,(t_n+4)/2 & 1 \end{pmatrix} z^n. \end{aligned}$$

Wegen $h = 1/2$ und $t_0 = 1$ ist ein Schritt (d.h. $n = 0$) nötig, um y und seine Ableitungen an der Stelle $t_1 = t_0 + h = 3/2$ zu approximieren, also

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ -1/2 & -11/8 & 1 \end{pmatrix}}_{=:M} z^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 3/8 & 5/4 & 1 \end{pmatrix} z^0 = \begin{pmatrix} 5/8 \\ -3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} =: s.$$

$\boxed{1.0}$

Das lineare Gleichungssystem $M\,z^1 = s$ ist mit LR–Zerlegung ohne Pivotisierung zu lösen:

$$M = \begin{array}{|ccc|} \hline 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ -1/2 & -11/8 & 1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|cc|} \hline 1 & -1/4 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1/4 \\ -1/2 & -3/2 & 1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|cc|c|} \hline 1 & -1/4 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1/4 \\ \hline -1/2 & -3/2 & 5/8 \\ \hline \end{array}$$

Also ist $M = L\,R$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 5/8 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{1.0}$

Das Lösen des Systems erfolgt mittels Vorwärts– und Rückwärtseinsetzen $L\,w = s$ sowie $R\,z^1 = w$ mit

$$w = \begin{pmatrix} 5/8 \\ -3/2 \\ -55/16 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad z^1 = \begin{pmatrix} -3/32 \\ -23/8 \\ -11/2 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{0.5+1.0}$

Damit stehen nun folgende Näherungen zur Verfügung:

$$\begin{pmatrix} y(3/2) \\ y'(3/2) \\ y''(3/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(3/2) \\ z_2(3/2) \\ z_3(3/2) \end{pmatrix} \approx z^1 = \begin{pmatrix} -3/32 \\ -23/8 \\ -11/2 \end{pmatrix}.$$

Teil c) Wir nutzen die DGL aus und erhalten

$$\begin{aligned} y'''(3/2) &= y'''(t_1) = \left(t_1 + \frac{1}{2}\right) y(t_1) + (t_1 + 4)\, y'(t_1) \\ &= 2\, y(3/2) + \frac{11}{2}\, y'(3/2) \approx 2 \cdot \frac{-3}{32} + \frac{11}{2} \cdot \frac{-23}{8} = -16. \end{aligned}$$

$\boxed{1.0}$

Numa–Klausur (DPO '99) Juli 2001: Aufgabe 4 (Interpolation)
(vgl. Aufgabe 6.4)

Aufgabe 4 (2 + 2)

Die Funktion $f(x) = \ln x$ ist als Tabelle gegeben.

x	2	4	6	8
$\ln x$	0.69315	1.3863	1.7918	2.0794

a) Berechnen Sie einen Näherungswert für $f(5)$ mit dem Neville–Aitken–Schema unter Benutzung aller Tabellenwerte und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

b) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(1.25)$ durch eine Newton–Interpolation vom Grad 2.

Hinweis: Benutzen Sie $\ln 1 = \ldots$ und $\ln(1/x) = -\ln x$, um geeignete Stützstellen zu bekommen.

Teil a) Für das Neville–Aitken–Schema wenden wir die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} P_{i,0} &:= f_i, \qquad 0 \le i \le n, \\ P_{i,j} &= P_{i,j-1} + \frac{x_i - \bar{x}}{x_i - x_{i-j}} \left(P_{i-1,j-1} - P_{i,j-1}\right), \qquad 1 \le i \le j \le n, \end{aligned}$$

an für $\bar{x} = 5,\ n = 3$ und die durch die Tabelle gegebenen Daten:

x_i	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	$P_{i,3}$
2	0.69315			
4	1.3863	1.73288		
6	1.7918	1.58905	1.62501	
8	2.0794	1.64800	1.60379	1.61440

Dann ist $f(\bar{x}) = f(5) \approx P_{3,3} = 1.6144.$ $\boxed{1.0}$

Die Fehlerabschätzung lautet allgemein

$$f(\bar{x}) - P_{n,n} = f(\bar{x}) - P(f|x_0, \ldots, x_n)(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (\bar{x} - x_0) \cdot \ldots \cdot (\bar{x} - x_n)$$

für ein $\xi \in (a,b) := (\min\{x_0, \ldots, x_n, \bar{x}\}, \max\{x_0, \ldots, x_n, \bar{x}\})$, also

$$|f(\bar{x}) - P_{n,n}| \le \frac{1}{(n+1)!} \max_{\xi \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right| |\bar{x} - x_0| \cdot \ldots \cdot |\bar{x} - x_n| .$$

Hier ist $n = 3,\ \bar{x} = 5,\ x_i = 2\,i+2,\ i = 0,1,2,3$ sowie $f(x) = \ln(x)$, und damit $a = 2,\ b = 8$ und

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

Da $|f^{(4)}(x)|$ monoton fallend ist, gilt

$$\max_{\xi\in[2,8]} |f^{(4)}(\xi)| = |f^{(4)}(2)| = 0.375,$$

also ergibt sich für den Fehler

$$|f(\bar{x}) - P_{3,3}| \leq \frac{1}{4!} \cdot 0.375 \cdot |5-2|\,|5-4|\,|5-6|\,|5-8| = 0.140625. \qquad \boxed{1.0}$$

Teil b) Bei quadratischer Interpolation (also vom Grad 2) lautet die Fehlerformel

$$|f(x) - P(f|x_0,x_1,x_2)(x)| = \frac{1}{3!} \max_{x\in[x_0,x_2]} |f'''(\xi)|\,|(x-x_0)\,(x-x_1)\,(x-x_2)|\,.$$

Um den letzten Term möglichst klein zu machen, sollten die Stützstellen möglichst nah an der auszuwertenden Stelle $x = 1.25$ liegen. Mit Hilfe der Logarithmenregeln gilt

$$\begin{aligned} \ln(1/2) &= -\ln(2) = -0.69315, \\ \ln(1) &= 0, \end{aligned} \qquad \boxed{0.5}$$

wobei der Wert für ln(2) der Tabelle zu entnehmen ist. Wir wählen $(x_0, f_0) = (0.5, -0.69315)$, $(x_1, f_1) = (1, 0)$ und ergänzen diese zwei Paare durch den Tabellenwert $(x_2, f_2) = (2, 0.69315)$. Für die Newton–Darstellung benötigen wir die dividierten Differenzen, wobei die in die Interpolationsformel eingehenden Werte unterstrichen sind:

x_i	$f_i = [x_i]f$		$[x_i, x_{i+1}]f$		$[x_0, x_1, x_2]f$
0.5	$\underline{-0.69315}$	$\rightarrow$	$\underline{1.38630}$	$\rightarrow$	$\underline{-0.462100}$
		$\nearrow$		$\nearrow$	
1.0	0.0	$\rightarrow$	0.693150		
		$\nearrow$			
2.0	0.69315				

$\boxed{1.0}$

Dann gilt für das Interpolationspolynom

$$\begin{aligned} P(f|x_0,x_1,x_2)(x) &= [x_0]f + [x_0,x_1]f\,(x-x_0) + [x_0,x_1,x_2]f\,(x-x_0)\,(x-x_1) \\ &= [x_0]f + (x-x_0)\,\left([x_0,x_1]f + [x_0,x_1,x_2]f\,(x-x_1)\right) \\ &= -0.69315 + (x-0.5)\,\left(1.38630 - 0.4621\,(x-1)\right), \end{aligned}$$

welches ausgewertet an der Stelle $x = 1.25$ den Wert

$$P(f|x_0,x_1,x_2)(1.25) = 0.25993$$

ergibt. $\boxed{0.5}$

(Einen noch besseren Wert erhalten wir z. B., wenn wir $\ln(3/2) = \ln(6/4) = \ln(6) - \ln(4) = 1.7918 - 1.3863 = 0.4055$ ausnutzen (alles Tabellenwerte) und die Stützstellen $x_0 = 0.5,\ x_1 = 1,\ x_2 = 1.5$ oder $x_0 = 1,\ x_1 = 1.5,\ x_2 = 2$ verwenden.)