Aufgabe 1 (11 Punkte)
Der Ausdruck

$$f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}, \qquad x > 1,$$

soll an der Stelle $x = 100$ ausgewertet werden. Dieser Wert ist mit einem relativen Fehler von 1% behaftet.

a) Schätzen Sie den relativen Fehler von $f(x)$ ab (in erster Näherung).

b) Berechnen Sie $f(x)$ für $x = 100$ in 4stelliger und in 6stelliger Gleitpunktarithmetik, wobei Sie folgenden Algorithmus verwenden:

$$\begin{array}{lll} y_1 & := & x^2, \\ y_2 & := & y_1 - 1, \\ y_3 & := & \sqrt{y_2}, \end{array} \qquad \begin{array}{lll} y_4 & := & x - y_3, \\ y_5 & := & 1/y_4. \end{array}$$

c) Erklären Sie die Resultate in b). Wie läßt sich das auftretende Problem vermeiden?

d) Welche Probleme treten auf, wenn f für $x = 1.0001$ ausgewertet werden soll? Können diese mit demselben Algorithmus wie in c) vermieden werden?

Lösung:

Teil a) Der relative Fehler genügt in 1. Näherung der Abschätzung

$$\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \doteq \kappa_{rel}(x) \cdot \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| = \left|\frac{x\, f'(x)}{f(x)}\right| \cdot \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right|.$$

Hier ist

$$f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = x + \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

also

$$\kappa_{rel}(x) = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\right|$$

und somit

$$\kappa_{rel}(100) = 1.00005.$$

Da $\delta_x := |(\tilde{x} - x)/x| = 0.01$, gilt insgesamt

$$\delta_f := \left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \doteq \kappa_{rel}(100) \cdot \delta_x = 0.100005.$$

Teil b) Mit 4stelliger Rechnung erhält man

$$\begin{array}{lll} y_1 & := & 10000, \\ y_2 & := & 9999, \\ y_3 & := & 100.0, \end{array} \qquad \begin{array}{lll} y_4 & := & 0.000, \\ y_5 & := & \text{ERROR}, \end{array}$$

während 6stellige Rechnung

$$\begin{array}{lll} y_1 & := & 10000.0, \\ y_2 & := & 9999.00, \\ y_3 & := & 99.9950, \end{array} \qquad \begin{array}{lll} y_4 & := & 0.00500000, \\ y_5 & := & 200.000 \end{array}$$

ergibt.

Teil c) Wegen $\kappa_{rel}(100) \approx 1$ ist das Problem gutkonditioniert, also ist der angegebene Algorithmus instabil. Wegen $x > 1$ gilt $(\sqrt{x^2 - 1})^2 = x^2 - 1$, also kann man f umformen in

$$f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = x + \sqrt{x^2 - 1},$$

was den folgenden, für $x \gg 1$ stabilen Algorithmus ergibt:

$$\begin{array}{lllcllll} z_1 & := & x^2, & & z_3 & := & \sqrt{z_2}, \\ z_2 & := & z_1 - 1, & & z_4 & := & x + z_3. \end{array}$$

(Mit 4stelliger Rechnung erhält man dann

$$\begin{array}{lllcllll} z_1 & := & 10000, & & z_3 & := & 100.0, \\ z_2 & := & 9999, & & z_4 & := & 200.0, \end{array}$$

was dem auf vier Stellen gerundeten exakten Wert entspricht, und mit 6stelliger Rechnung

$$\begin{array}{lllcllll} z_1 & := & 10000, & & z_3 & := & 99.9950, \\ z_2 & := & 9999, & & z_4 & := & 199.995, \end{array}$$

was dem auf sechs Stellen gerundeten exakten Wert entspricht.)

Teil d) Für $x = 1.0001$ ergibt sich die relative Konditionszahl

$$\kappa_{rel}(1.0001) = 70.72,$$

also ist das Problem nun wesentlich schlechter konditioniert als bisher. Für x liegt nun keine Auslöschung durch $x \approx \sqrt{x^2-1}$ vor, daher lässt sich das Problem *nicht* durch den in c) entwickelten Algorithmus beheben. Stattdessen liegt Auslöschung an der Stelle $x^2 \approx 1$ vor, weshalb man das Problem durch

$$f(x) = x + \sqrt{x^2-1} = x + \sqrt{(x-1)(x+1)}$$

oder durch Taylorentwicklung um die Stelle 1 ein bißchen entschärfen kann, aber wegen

$$\lim_{x->1+} f'(x) = \infty$$

kann man es nicht vollständig beheben.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Lösen Sie approximativ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x^2 + 5y^2 - 6xy &= 8 \\ x^2 + xy &= 1 \end{aligned}$$

mittels zweier Iterationen des Newtonverfahrens für Systeme. Benutzen Sie als Startwert

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.1 \\ 0.3 \end{pmatrix}.$$

large**Lösung:**

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x^2+5y^2-6xy \\ x^2+xy \end{pmatrix} \Rightarrow f'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x-6y & -6x+10y \\ 2x+y & x \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} -1.1 \\ 0.3 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} .48 \\ -.12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} -12.8 & 9.6 \\ -1.9 & -1.1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -12.8 & 9.6 & .48 \\ -1.9 & -1.1 & -.12 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -12.8 & 9.6 & .48 \\ 0 & -2.525 & -.19125 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} .019307 \\ .075743 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \Delta\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -1.119307 \\ .224257 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} .021774 \\ .001835 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} -12.538614 & 8.958416 \\ -2.014356 & -1.119307 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -12.538614 & 8.958416 & .021774 \\ -2.014356 & -1.119307 & .001835 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -12.538614 & 8.958416 & .021774 \\ 0 & -2.558497 & -.001663 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -.001272 \\ .000650 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \Delta\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1.118035 \\ .223607 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben seien die Meßwerte

t_i	1	4	9
f_i	-1	0	2

einer Größe $f(t)$, welche von der Form

$$f(t) = a + b\sqrt{t}$$

vermutet wird. Die Parameter a, b sollen optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden.

a) Formulieren Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem, welches a und b eindeutig festlegt.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem über die Normalgleichungen mittels LDL^T-Zerlegung. Gegeben Sie L und D explizit an. Wie groß ist das Residuum?

c) Wie kann man ein lineares Ausgleichsproblem alternativ behandeln? (Methode benennen!) Ein lösbares Ausgleichsproblem wird mit beiden Verfahren und derselben Gleitpunktarithmetik behandelt. Wann wird die Abweichung in den beiden Ergebnissen stärker und welches ist dann das bessere Ergebnis? (Begründung!)

Lösung:

Teil a)

$$\|A \cdot x - f\|_2 \to min \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad f = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Teil b) Normalgleichungen $A^T A \cdot x = A^T f$ mit:

$$B := A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := A^T f = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} d_1 := B_{11} = 3 \\ L_{21} := B_{21}/d_1 = 2 \\ d_2 := B_{22} - d_1 * L_{21}^2 = 2 \end{array} \quad \to L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot y = b \to y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot z = y \to z = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$L^T \cdot x = z \to x = \begin{pmatrix} -8/3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Also $y(t) = -8/3 + 3/2 * \sqrt{t}$. Das Residum ist

$$\|A \cdot x - f\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8/3 \\ 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} \right\|_2 = 1/\sqrt{6} = 0.4082482904$$

Teil c) Alternativ kann man orthogonale Transformationen (Q-R) verwenden

$$[A|b] \to Q^T \cdot [A|b] = [R|y]$$

(*oberer* Teil $\to$ Lösung, *unterer* Teil von y $\to$ Residuum.) Ist die Kondition $\kappa(A)$ groß, so ist die Kondition der Normalgleichungen (ungefähr $\kappa(A)^2$) so schlecht, dass das Ergebnis unbrauchbar wird. Man **MUSS** Q-R verwenden.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Funktion (das Integral)

$$F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$$

ist als Tabelle gegeben.

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5
$F(x)$	0.0	.67258	1.3052	1.8670	2.3416	2.7267	3.0310

a) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(0.8)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung von vier Tabellenwerte und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

b) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(1.1)$ durch eine Newton-Interpolation vom Grad 2. Geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

Hinweis: $F(x)$ ist die Stammfunktion von $e^{\cos x}$.

Lösung:

Teil a) Um den Fehler klein zu halten (Anteil Knotenpolynom ω), wählen wir die Stützstellen 0.5, 0.75, 1.0 und 1.25

$$
\begin{array}{c|lllll}
0.50 & 1.3052 & & & & \\
 & & > 1.97936 & & & \\
0.75 & 1.8670 & & > 1.968896 & & \\
 & & > 1.96192 & & > 1.968970 & \text{Also: } F(0.8) \approx P_{33} = 1.968970 \\
1.00 & 2.3416 & & > 1.969080 & & \\
 & & > 2.03352 & & & \\
1.25 & 2.7267 & & & &
\end{array}
$$

Fehlerabschätzung:

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= e^{\cos(x)} \\
F''(x) &= -\sin(x)e^{\cos(x)} \\
F'''(x) &= (-\cos(x) + \sin^2(x))e^{\cos(x)} \\
F^{(iv)}(x) &= \sin(x)(1 - \sin^2(x) + 3\cos(x))e^{\cos(x)} \\
&= \sin(x)\cos(x)(\cos(x) + 3)e^{\cos(x)} \qquad \left(= \tfrac{1}{2}\sin(2x)(\cos(x)+3)e^{\cos(x)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
|F(0.8) - P_{33}| \leq \frac{1}{4!} \max_{x \in [0.5, 1.25]} \left|F^{(iv)}(x)\right| \prod_{i=0}^{3} |0.8 - x_i|
$$

$$
\leq \frac{1}{24} \sin(1.25)\cos(0.5)(\cos(0.5) + 3)e^{\cos(0.5)} 0.3 \cdot 0.05 \cdot 0.2 \cdot 0.45 = 0.000437
$$

$$
\left(\leq \frac{1}{24}\frac{1}{2}(\cos(0.5) + 3)e^{\cos(0.5)} = 0.0002623\right)
$$

Teil a) Hier sind die Stützstellen 0.75, 1.0 und 1.25 zu wählen:

$$
\begin{array}{c|lll}
0.75 & 1.8670 & & \\
 & & > 1.8984 & \\
1.00 & 2.3416 & & > \text{-}0.716 \\
 & & > 1.5404 & \\
1.25 & 2.7267 & &
\end{array}
$$

$$
p_2(x) = 1.867 + (x - 0.75) \cdot (1.8984 + (x - 1) \cdot (-0.716))
$$
$$
p_2(1.1) = 2.50638
$$

In a) sieht man, dass $F^{(iv)}(x)$ auf $(0, \pi/2)$ positiv ist, d.h. $F'''(x)$ ist auf $[0.75, 1.25]$ streng monoton steigend, es reicht also, die Randwerte zu untersuchen.

$$
\max_{x \in [0.75, 1.25]} |F'''(x)| = \max\{|F'''(0.75)|, |F'''(1.25)|\} = max\{0.5551025, 0.8022021\} = 0.8022021
$$

(oder $(\sin(1.25))^2 + \cos(0.75)) \cdot e^{\cos(0.75)} = 3.39284$)

$$
\rightarrow |p_2(1.1) - F(1.1| \leq 0.00281 \qquad (\text{oder} \quad 0.0272)
$$