Aufgabe 1 (6 Punkte)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & -0.8 \\ 1.2 & 2.4 & 0.6 \\ -0.4 & 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 6.6 \\ -0.2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR–Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung, d.h. $PA = LR$, wobei P eine geeignete Permutationsmatrix ist. Geben sie L und R explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR–Zerlegung.

c) Betrachten Sie nun das gestörte Gleichungssystem $\tilde{A} \cdot x = b$, wobei $\tilde{A}$ eine Störung von A ist. Wie groß darf der relative Fehler in A höchstens sein, damit der relative Fehler in x nicht größer als 3% ist? **Hinweis:** Für die Kondition von A bzgl. der 1-Norm gilt $\kappa_1(A) \approx 15.56$.

Lösung:
a) Wir speichern die Permutation in einem Vektor, den wir an A anhängen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.6 & 0.8 & -0.8 & 1 \\ 1.2 & 2.4 & 0.6 & 2 \\ -0.4 & 0.0 & 0.2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|cc|c} 1.2 & 2.4 & 0.6 & 2 \\ \hline 0.5 & -0.4 & -1.1 & 1 \\ -1/3 & 0.8 & 0.4 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1.2 & 2.4 & 0.6 & 2 \\ \hline -1/3 & 0.8 & 0.4 & 3 \\ \cline{2-2} 0.5 & -0.5 & -0.9 & 1 \end{array}\right)$$

Und somit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 1.2 & 2.4 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0 & -0.9 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad p = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir benutzen p für die Permutation von b und erhalten:

(i) Vorwärtseinsetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6.6 \\ -1/3 & 1 & 0 & -0.2 \\ 0.5 & -0.5 & 1 & -0.4 \end{array}\right) \Big\downarrow \to y = \begin{pmatrix} 6.6 \\ 2 \\ -2.7 \end{pmatrix}$$

(ii) Rückwärtseinsetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1.2 & 2.4 & 0.6 & 6.6 \\ 0 & 0.8 & 0.4 & 2 \\ 0 & 0 & -0.9 & -2.7 \end{array}\right) \Big\uparrow \to x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) Aus der *Fehlerformel*

$$r_x \le \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \cdot r_A} \cdot r_A \overset{!}{\le} \varepsilon$$

erhalten wir

$$r_A \le \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon) \cdot \kappa(A)} = \frac{0.03}{1.03 \cdot 15.56} = 0.001872 \approx 0.2\%$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Gegeben sei die nichtlineare Gleichung

$$e^{-x^2} = 2x.$$

a) Stellen Sie eine geeignete Fixpunktfunktion F auf. In welchem Intervall können überhaupt Fixpunkte liegen? (Wertebereich von F beachten!)

b) Überprüfen Sie die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für das F aus a). Führen Sie ausgehend von einem geeigneten Startwert x_0 (dieser ist auf eine Nachkommastelle zu runden) zwei Schritte des Fixpunktverfahrens durch, und geben Sie dann eine a–posteriori–Fehlerschätzung an.

c) Führen Sie zwei Schritte des Newton–Verfahrens mit Startwert $x_0 = 1$ durch, um eine Näherungslösung zu erhalten.

Lösung:

a) Fixpunktform:

$$F(x) := \frac{e^{-x^2}}{2} = x \quad \text{mit} \quad F : \mathrm{I\!R} \to (0, 0.5],$$

also kommt nur $D = [0, 0.5]$ für die Fixpunktbetrachtung in Frage.

b) i) D ist abgeschlossen.

ii) Da $F(D) \subset F(\mathrm{I\!R}) \subset D$ ist, sind wir eigentlich schon fertig. Wir betrachten aber etwas genauer: F ist monoton fallend auf D und $F(0) = 0.5$ sowie $F(0.5) = 0.3894$. Also ist F selbstabbildend auf D und genauer $F(D) \subset [0.38, 0.5] =: D'$

iii) Es gilt:

$$F'(x) = -x \cdot e^{-x^2} \qquad (\to |F'(x)| \le 0.5 \cdot e^0 = 0.5 \quad \text{auf} \quad D).$$

Genauer: $F''(x) = 2 \cdot (x^2 - 1/2) \cdot e^{-x^2} < 0$ auf $[0, \sqrt{2}/2 = 0.7071]$. Damit ist F' auf D' streng monoton fallend und negativ. $|F'|$ nimmt also sein Extremum am *rechten Rand* an: $|F'(0.5)| = 0.3894$. Also ist F kontraktiv auf D'. Wähle zum Beispiel $L = 0.4$.

iv) Da der Startwert auf eine Nachkommastelle zu runden ist, setzen wir $x_0 := 0.4 \in D'$. Dies ergibt dann $x_1 = F(x_0) = 0.42607$ und $x_2 = F(x_1) = 0.41699$.
Hierzu lautet die a-posteriori Fehlerabschätzung

$$|x_2 - x^*| \le \frac{L}{1-L} \cdot |x_2 - x_1| = \frac{0.4}{0.6} \cdot 0.00908 = 0.00605$$

c) Nullstellenfunktion:

$$f(x) = e^{-x^2} - 2x \to f'(x) = -2xe^{-x^2} - 2.$$

Newton-Iteration:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{-x_k^2} - 2x_k}{-2x_k e^{-x_k^2} - 2}$$

Damit ist:

$$x_0 = 1$$
$$x_1 = 1 - \frac{e^{-1} - 2}{-2e^{-1} - 2} = 0.4034121319$$
$$x_2 = 0.4194182130$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \sin^2(t)\, dt$$

ist als Tabelle gegeben.

x_i	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$f(x_i)$	0.0000	0.045293	0.14270	0.30709	0.78540

a) Bestimmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(1)$ mit dem Neville–Aitken–Schema unter Benutzung von 3 Tabellenwerten, und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

b) Bestimmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.2)$ durch eine Newton–Interpolation vom Grad 3, und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.
Hinweis: f ist punktsymmetrisch im Ursprung.

Lösung:

Teil a) Die Benutzung von 3 Tabellenwerten entspricht der Interpolation mit einem quadratischen Polynom p_2. Die diesbezügliche Fehlerabschätzung lautet

$$|f(\bar{x}) - p_2(\bar{x})| \le \frac{1}{3!} \max_{z \in [x_0, x_2]} |f'''(z)| \cdot |(\bar{x} - x_0)\,(\bar{x} - x_1)\,(\bar{x} - x_2)|.$$

Da $\bar{x} = 1$ gilt, wird der das Knotenpolynom betreffende Anteil durch die Wahl $x_0 = \pi/6$, $x_1 = \pi/4$, $x_2 = \pi/3$ minimiert. Das Neville–Aitken–Schema

$$\begin{aligned}
P_{i,0} &= f_i \;=\; f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n \\
P_{i,k} &= \frac{\bar{x} - x_{i-k}}{x_i - x_{i-k}} P_{i,k-1} + \frac{x_i - \bar{x}}{x_i - x_{i-k}} P_{i-1,k-1} \\
&= P_{i,k-1} + \frac{x_i - \bar{x}}{x_i - x_{i-k}} (P_{i-1,k-1} - P_{i,k-1}) \\
&= P_{i-1,k-1} + \frac{\bar{x} - x_{i-k}}{x_i - x_{i-k}} (P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}), \quad i = k, k+1, \ldots, n, \; k = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}$$

ergibt folgendes Tableau:

x_i	$P_{i,0}$		$P_{i,1}$		$P_{i,2}$
$x_0 = \pi/6$	0.045293				
		$\searrow$			
$x_1 = \pi/4$	0.14270	$\rightarrow$	0.222546		
		$\searrow$		$\searrow$	
$x_2 = \pi/3$	0.30709	$\rightarrow$	0.277454	$\rightarrow$	0.272505

Damit erhalten wir die Näherung $f(1) \approx p_2(1) = P_{2,2} = 0.27251$.

Für die Fehlerabschätzung benötigen wir die Ableitungen von f. Für die erste nutzen wir den Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung aus, und die verbleibenden Ableitungen vereinfachen sich durch ein Additionstheorem.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sin^2(x), \\
f''(x) &= 2\sin(x)\cos(x) \;=\; \sin(2x), \\
f'''(x) &= 2\cos(2x).
\end{aligned}$$

Im Intervall $[x_0, x_2]$ ist $\cos(2x)$ monoton fallend und punktsymmetrisch zu $\pi/4$. Also erhalten wir

$$\max_{z \in [x_0, x_2]} |f'''(z)| = 1.$$

Für das Knotenpolynom ergibt sich

$$|(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)| = |(1 - \pi/6)(1 - \pi/4)(1 - \pi/3)| = 0.48253 \cdot 10^{-2},$$

und somit

$$|f(\bar{x}) - p_2(\bar{x})| \leq \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 0.48253 \cdot 10^{-2} = 0.8042 \cdot 10^{-3}.$$

Wegen $|f(\bar{x}) - p_2(\bar{x})| \leq 0.8042 \cdot 10^{-3} \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$ ist das Ergebnis damit auf zwei Nachkommastellen genau.

Teil b) Für die Fehlerabschätzung erhalten wir mit $n = 3$

$$|f(\bar{x}) - p_3(\bar{x})| \leq \frac{1}{4!} \max_{z \in [x_0, x_3]} |f^{(4)}(z)| \cdot |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)(\bar{x} - x_3)|.$$

Gemäß Hinweis gilt $f(-x) = -f(x)$. Da eine Näherung für $\bar{x} = 0.2$ gesucht ist, wird der das Knotenpolynom betreffende Anteil durch die Wahl $x_0 = -\pi/6$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/6$, $x_2 = \pi/4$ minimiert. Für das Newton–Schema der dividierten Differenzen ergibt sich:

$x_0 = -\pi/6$	-0.045293			
		> 0.0865033		
$x_1 = 0$	0.00000		> 0.000000	
		> 0.0865033		> 0.277763
$x_2 = \pi/6$	0.045293		> 0.363591	
		> 0.372067		
$x_3 = \pi/4$	0.14270			

Die Newton–Darstellung des Interpolationspolynoms lautet in der hornerartigen Form

$$p_3(x) = -0.045293 + (x + \pi/6) \cdot \{0.0865033 + (x - 0) \cdot [0.0 + (x - \pi/6) \cdot 0.277763]\}.$$

Ausgewertet an der Stelle $\bar{x} = 0.2$ ergibt sich der auf 5 Stellen gerundete Wert $p_3(\bar{x}) = 0.0042927$.
Für die Fehlerabschätzung benötigen wir noch die 4. Ableitung von f:

$$f^{(4)}(x) = -4 \sin(2\,x).$$

Für $x = \pi/4$ nimmt $\sin(2\,x)$ betragsmäßig sein globales Maximum an, also

$$\max_{z\in[x_0,x_3]} |f^{(4)}(z)| = 4.$$

Für das Knotenpolynom ergibt sich

$$|(\bar{x} - x_0)\,(\bar{x} - x_1)\,(\bar{x} - x_2)\,(\bar{x} - x_3)| = |(0.2 + \pi/6)\,(0.2 - 0.0)\,(0.2 - \pi/6)\,(1 - \pi/4)| = 0.027415,$$

und somit

$$|f(\bar{x}) - p_3(\bar{x})| \leq \frac{1}{24} \cdot 4 \cdot 0.027415 = 0.45692 \cdot 10^{-2}.$$

Wegen $|f(\bar{x}) - p_3(\bar{x})| \leq 0.45692 \cdot 10^{-2} \leq 0.5 \cdot 10^{-2}$ ist das Ergebnis damit auf zwei Nachkommastellen genau.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(t) + y'(t) - 2\,t\,y(t) = 0, \qquad y(2) = 5,\ \ y'(2) = 4.$$

a) Berechnen Sie mit dem verbesserten Euler–Verfahren und der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ jeweils eine Approximation von $y(3)$ und $y'(3)$.

b) Geben Sie eine Näherung für $y''(3)$ an.

Lösung:

1. Zunächst wird die lineare DGL 2. Ordnung in ein System 1. Ordnung überführt. Setze $\mathbf{z}(t) := (y(t), y'(t))^T$, dann erhält man

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ 2ty(t) - y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t & -1 \end{pmatrix} \mathbf{z}(t).$$

   Die äquivalente Anfangswertaufgabe lautet also

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t & -1 \end{pmatrix} \mathbf{z}(t), \qquad \mathbf{z}(2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   Definiere $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$F(t, \mathbf{z}) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2t & -1 \end{pmatrix} \mathbf{z}.$$

   Die Iterationsvorschrift des verbesserten Euler–Verfahrens lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= F(t_j, \mathbf{z}_j) \\ \mathbf{k}_2 &= F(t_j + \tfrac{1}{2}h, \mathbf{z}_j + \tfrac{1}{2}h\mathbf{k}_1) \qquad (j \geq 0). \\ \mathbf{z}_{j+1} &= \mathbf{z}_j + h\mathbf{k}_2 \end{aligned}$$

Bei $h = \frac{1}{2}$ müssen 2 Schritte durchgeführt werden. Mit $\mathbf{z}_0 = (5,4)^T$ erhält man im ersten Schritt die Werte

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{k}_2 &= \begin{pmatrix} 8 \\ 19 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{z}_1 &= \begin{pmatrix} 9 \\ 13.5 \end{pmatrix} \approx \mathbf{z}(2.5).
\end{aligned}$$

Die Ergebnisse des zweiten Schrittes lauten

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \begin{pmatrix} 13.5 \\ 31.5 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{k}_2 &= \begin{pmatrix} 21.375 \\ 46.6875 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{z}_2 &= \begin{pmatrix} 19.6875 \\ 36.84375 \end{pmatrix} \approx \mathbf{z}(3).
\end{aligned}$$

2. Es gilt
$$y''(3) = -y'(3) + 2 \cdot 3\; y(3).$$
Mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil a) folgt
$$y''(3) \approx -(\mathbf{z}_2)_2 + 6\,(\mathbf{z}_1)_2 = 81.28125.$$