Aufgabe 1 (11 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos(1) & \sin(1) & 0 \\ -\sin(1) & \cos(1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5.01 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa_\infty(A)$ der Matrix. Ist A gut oder schlecht konditioniert?

b) Mit welchem relativen Fehler in x (in der ∞-Norm) muß man rechnen, wenn statt des ursprünglichen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ das gestörte Gleichungssystem $\tilde{A}x = \tilde{b}$ gelöst wird, wobei $\tilde{A}$ und $\tilde{b}$ Störungen von A bzw. b mit einem relativen Fehler von maximal 1% sind?

c) Lösen Sie $A \cdot x = b$ mittels Gaußelimination mit Pivotisierung in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik.

Lösung:

Sei $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$.

a) $\|A\| = |\cos(1)| + |\sin(1)| = 1,3817733.$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(1) & -\sin(1) & 0 \\ \sin(1) & \cos(1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da A Drehmatrix, ist $A^{-1} = A^T$.
$\Rightarrow \|A^{-1}\| = \|A^T\| \overset{\text{hier}}{=} \|A\| \Rightarrow \kappa_\infty(A) = \|A\|^2 = 1.9092975$. Also hat A eine sehr gute Kondition.

b) $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = 0.01$, $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = 0.01$, laut Aufgabenstellung.

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa_\infty(A)}{1 - \kappa_\infty(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

Die Formel darf nur angewandt werden, falls der Nenner größer Null ist, dies ist aber hier der Fall.

$$= \frac{1.90929}{1 - 1.90929 * 0.01}(0.01 + 0.01) = 0.0389292.$$

Die Antwort ist also 3.9%.

c) Rechnung in dreistelliger Gleitpunktarithmetik:

$$A = \begin{pmatrix} 0.540 & 0.841 & 0 \\ -0.841 & 0.540 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Vertausche erste und zweite Zeile und führe einen Gauss-Schritt durch:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -0.841 & 0.540 & 0 \\ 0 & 1.19 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In der rechten Seite werden nur die erste und zweite Zeile vertauscht, da nach der Vertauschung das erste Element eine Null ist, ändert sich sonst nichts.

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5.01 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Also: $x_3 = 2$, $x_2 = \frac{5.01}{1.19} = 4.21$ und $x_1 = \frac{0.540*4.21}{0.841} = 2.70$. Und somit

$$x = \begin{pmatrix} 2.70 \\ 4.21 \\ 2.00 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Gegeben seien folgende Stützstellen x_i und Meßwerte y_i

x_i	0	0.5	2
f_i	4	2.5	2

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, daß diese Meßdaten einer Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x + 2 \cdot a} + b$$

genügen. Bestimmen Sie die Parameter a und b optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem, und führen Sie ausgehend vom Startwert $(a_0, b_0) = (0.25, 1.5)$ einen Gauß–Newton–Schritt durch. Berechnen Sie anschließend das Residuum.
Hinweis: Lösen Sie das auftretende lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen.

Lösung:

Eine Zeile der Jakobischen

$$z = \begin{pmatrix} \dfrac{-2}{(x+2\cdot a)^2} & 1 \end{pmatrix}$$

Dies führt mit den Startwerten

$$a_0 = 0.25 \quad b_0 = 1.5$$

zu folgender Zeile des (lin.) Gleichungssytems mit rechter Seite:

$$J_i = \begin{pmatrix} \dfrac{-2}{(x_i + 0.5)^2} & 1 & | & y_i - \dfrac{1}{x_i + 0.5} - 1.5 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Meßwerte:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} -8 & 1 & | & 0.5 \\ -2 & 1 & | & 0 \\ -0.32 & 1 & | & 0.1 \end{pmatrix}$$

führt zu den Normalgleichungen $\left(A^T A | A^T b\right)$:

$$\begin{pmatrix} 68.10 & -10.32 & | & -4.032 \\ -10.32 & 3 & | & 0.6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 68.10 & -10.32 & | & -4.032 \\ 0 & 1.436 & | & -0.01100 \end{pmatrix}$$

$$\to \Delta_x = \begin{pmatrix} -0.06037 \\ -0.007657 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1896 \\ 1.492 \end{pmatrix}$$

$$f(x) \approx= \frac{1}{x + 0.3793} + 1.492$$

Residuum

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(f\left(x_i\right) - y_i\right)^2} = 0.2027$$

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \sqrt{2\,x + 1}$ ist als Tabelle gegeben.

x_i	0	1.5	4	7.5
$f(x_i)$	1	2	3	4

a) Berechnen Sie mittels eines Polynoms 2. Grades eine möglichst gute Näherung für $f(5)$. Stellen Sie das Polynom nicht explizit auf, sondern verwenden Sie das Neville–Aitken Schema.

b) Berechnen Sie das Newton'sche Interpolationspolynom vom Grad 3. Werten Sie es an der Stelle $\bar{x} = 3$ mit dem hornerartigen Schema aus, und geben Sie speziell für diese Stelle eine möglichst gute Fehlerabschätzung an.

c) Sei $p(x)$ das Interpolationspolynom von f unter Benutzung aller Tabellenwerte. Wie groß wird der Fehler $|f(x) - p(x)|$ im Intervall $[0, 7.5]$ maximal?

Hinweis: Das Knotenpolynom $\omega(s) = \prod_{i=0}^{3}(s - x_i)$ hat folgende Extremstellen: $s_0 = 0.62888$, $s_1 = 2.8547$, $s_2 = 6.2664$.

Lösung:

Teil a) Für ein Polynom 2. Grades benötigen wir 3 Stützstellen. Die Fehlerabschätzung lautet

$$|f(\bar{x}) - p_2(\bar{x})| \leq \frac{1}{3!} \max_{z \in [x_0, x_2]} |f'''(z)| \cdot |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)|.$$

Da $\bar{x} = 5$ gilt, wird der das Knotenpolynom betreffende Anteil durch die Wahl $x_0 = 1.5$, $x_1 = 4$, $x_2 = 7.5$ minimiert. Das Neville–Aitken–Schema

$$\begin{aligned} P_{i,0} &= f_i = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n \\ P_{i,k} &= \frac{\bar{x} - x_{i-k}}{x_i - x_{i-k}} P_{i,k-1} + \frac{x_i - \bar{x}}{x_i - x_{i-k}} P_{i-1,k-1} \\ &= P_{i,k-1} + \frac{x_i - \bar{x}}{x_i - x_{i-k}} (P_{i-1,k-1} - P_{i,k-1}) \\ &= P_{i-1,k-1} + \frac{\bar{x} - x_{i-k}}{x_i - x_{i-k}} (P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}), \quad i = k, k+1, \ldots, n, \ k = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

ergibt folgendes Tableau:

x_i	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 1.5$	2.0000		
$x_1 = 4.0$	3.0000	3.4000	
$x_2 = 7.5$	4.0000	3.2857	3.3333

Damit erhalten wir die Näherung $f(5) \approx p_2(5) = P_{2,2} = 3.3333$.

Teil b) Für ein Polynom 3. Grades benötigen wir alle 4 Stützstellen aus der Tabelle. Für das Newton–Schema der dividierten Differenzen ergibt sich:

$$\begin{array}{r|lllllll} x_0 = 0.0 & 1.0000 & & & & & & \\ & & > & 0.66667 & & & & \\ x_1 = 1.5 & 2.0000 & & & > & \text{-0.066668} & & \\ & & > & 0.40000 & & & > & 0.0063493 \\ x_2 = 4.0 & 3.0000 & & & > & \text{-0.019048} & & \\ & & > & 0.28571 & & & & \\ x_3 = 7.5 & 4.0000 & & & & & & \end{array}$$

Die Newton–Darstellung des Interpolationspolynoms lautet in der hornerartigen Form

$$p_3(x) = 1.0000 + (x - 0.0) \cdot \{0.66667 + (x - 1.5) \cdot [(-0.066668) + (x - 4.0) \cdot 0.0063493]\}.$$

Ausgewertet an der Stelle $\bar{x} = 3$ (mit dem hornerartigen Schema!) ergibt sich der Wert $p_3(\bar{x}) = 2.6714$.

Für die Fehlerabschätzung erhalten wir mit $n = 3$

$$|f(\bar{x}) - p_3(\bar{x})| \leq \frac{1}{4!} \max_{z \in [x_0, x_3]} |f^{(4)}(z)| \cdot |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)(\bar{x} - x_3)|.$$

Die Ableitungen von f lauten

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(\sqrt{2x+1})^3}, \quad f'''(x) = \frac{3}{(\sqrt{2x+1})^5}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{15}{(\sqrt{2x+1})^7}.$$

$|f^{(4)}(x)|$ ist monoton fallend, daher wird das Maximum am linken Intervallrand $x_0 = 0$ angenommen:

$$\max_{z\in[x_0,x_3]} |f^{(4)}(z)| = |f^{(4)}(0)| = 15.$$

Für das Knotenpolynom ergibt sich

$$|(\bar{x}-x_0)\,(\bar{x}-x_1)\,(\bar{x}-x_2)\,(\bar{x}-x_3)| = |(3-0)\,(3-1.5)\,(3-4)\,(3-7.5)| = 20.25,$$

und somit

$$|f(\bar{x}) - p_3(\bar{x})| \leq \frac{1}{24}\cdot 15 \cdot 20.25 = 12.656.$$

Dieser unbrauchbar hohe Wert erklärt sich zum einen durch die große Steigung von f am linken Intervallrand und zum andern durch den ziemlich großen Abstand der Stützstellen im gesamten Intervall. Tatsächlich beträgt der Fehler an dieser Stelle -0.0257.

Teil c) In der Fehlerabschätzung in Teil b) muß zusätzlich auf beiden Seiten das Maximum bzgl. $\bar{x} \in [0, 7.5]$ gebildet werden:

$$\max_{\bar{x}\in[0,7.5]} |f(\bar{x}) - p_3(\bar{x})| \leq \frac{1}{4!} \max_{z\in[x_0,x_3]} |f^{(4)}(z)| \cdot \max_{\bar{x}\in[0,7.5]} |(\bar{x}-x_0)\,(\bar{x}-x_1)\,(\bar{x}-x_2)\,(\bar{x}-x_3)|.$$

Das Maximum der 4. Ableitung kann aus b) übernommen werden, und die lokalen Extrema des Knotenpolynoms $\omega(s) = s\,(s-1.5)\,(s-4)\,(s-7.5)$ sind gemäß Hinweis

$$\omega(s_0) = -12.690, \qquad \omega(s_1) = 20.575, \qquad \omega(s_2) = -83.506,$$

also $\max_{\bar{x}\in[0,7.5]} |\omega(\bar{x})| = 83.506$, da $\omega(x_i) = 0$ für die Intervallränder $x_0 = 0$ und $x_3 = 7.5$.
Somit erhalten wir für den Fehler

$$\max_{\bar{x}\in[0,7.5]} |f(\bar{x}) - p_3(\bar{x})| \leq \frac{1}{24}\cdot 15 \cdot 83.506 = 52.192,$$

was natürlich ein genauso unbrauchbarer Wert ist wie in b).

Aufgabe 4 (9 Punkte)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y^2(t) - 5t, \qquad y(1) = 2.$$

a) Berechnen Sie mit dem expliziten Euler–Verfahren zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ eine Näherung zu $y(2)$.

b) Berechnen Sie mit dem impliziten Euler–Verfahren zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ eine Näherung zu $y(2)$.
Hinweis: Die in jedem Zeitschritt zu lösende quadratische Gleichung in y_{k+1} besitzt jeweils zwei reelle Lösungen. Nehmen Sie jeweils diejenige Lösung, die am nächsten zur vorhergehenden Approximation y_k liegt.

c) Geben Sie eine geometrische Veranschaulichung für das implizite Euler–Verfahren.

Lösung:

1. Iteration des expliziten Euler–Verfahrens

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(t_k, y_k) \\ &= y_k + h\big((y_k)^2 - 5t_k\big) \end{aligned}$$

liefert

$$y_0 = 2, \quad y_1 = \tfrac{3}{2}, \quad y_2 = -\tfrac{9}{8}.$$

2. Iteration des impliziten Euler–Verfahrens lautet für obige Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1}) \\ &= y_k + h\big((y_{k+1})^2 - 5t_{k+1}\big) \end{aligned}$$

In jedem Zeitschritt ist somit die quadratische Gleichung in y_{k+1}

$$0 = (y_{k+1})^2 - \frac{1}{h}\, y_{k+1} + y_k - 5\, h\, t_{k+1}$$

zu lösen. Aus dem Anfangswert erhält man

$$y_0 = 2.$$

Zur Berechnung von y_1 löst man zunächst

$$0 = (y_1)^2 - 2\, y_1 + (4 - 5 \cdot \frac{3}{2})$$

und erhält

$$(y_1)_{1/2} = 1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

und daraus

$$y_1 = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 3.12132.$$

Im zweiten Zeitschritt löst man

$$0 = (y_2)^2 - 2\, y_2 + -8 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

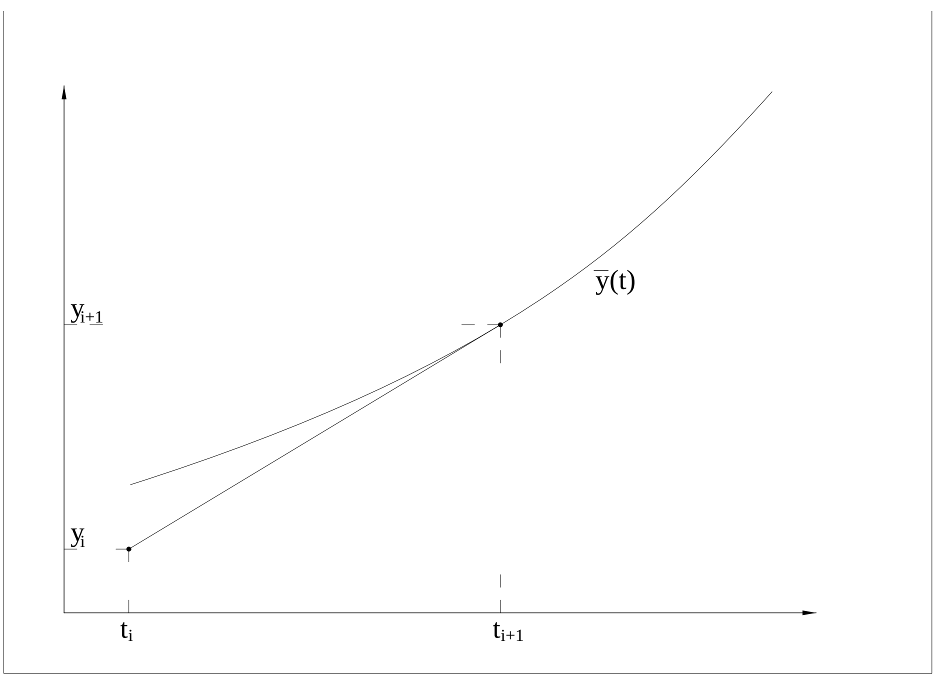
und erhält

$$(y_2)_{1/2} = 1 \pm \sqrt{9 - 3\sqrt{2}}.$$

Damit ergibt sich

$$y_2 = 1 + \sqrt{9 - 3\sqrt{2}} \approx 3.18114.$$

3. Skizze zum impliziten Euler–Verfahren:



Da die Steigung für den impliziten Eulerschritt $f(t_{i+1}, y_{i+1})$ ist, liegt eine Berührung mit dem Schaubild von $\overline{y}(t)$ vor. Dabei ist $\overline{y}(t)$ die Lösung der Differentialgleichung mit $\overline{y}'(t) = f(t, \overline{y}(t))$ zum Startwert $\overline{y}_0 = y_{i+1}$.