Aufgabe 1 (5 Punkte)
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -90 \\ -11 & 0 & 9 \\ 88 & -11 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} -10.5 \\ -2.4 \\ 28.7 \end{pmatrix}.$$

a) Jede Komponente von b sei mit einem relativen Meßfehler von $0.5 \cdot 10^{-3}$ behaftet; die Matrix A sei ungestört. Mit welchem relativen Fehler in x (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$) müssen Sie rechnen?

Hinweis: $\|A^{-1}\|_\infty \approx 2.72$.

b) Lösen Sie $A\,x = b$ in 3–stelliger Gleitpunktarithmethik durch Gaußelimination **mit** Skalierung (Zeilenequilibrierung) und **mit** Spaltenpivotisierung.

Teil a) Da nur die rechte Seite gestört sein soll, gilt für die Fehlerfortpflanzung (in der $\|\circ\|_\infty$–Norm)

$$r_\infty(x) \leq \kappa_\infty(A) \cdot r_\infty(b)$$

mit den relativen Fehlern $r_\infty(x)$ der Lösung und $r_\infty(b)$ der rechten Seite sowie der Kondition $\kappa_\infty(A)$ der Matrix. Gemäß Aufgabenstellung und Definition gilt

$$r_\infty(b) := \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{\max_i |\Delta b_i|}{\max_j |b_j|} \leq \frac{\max_i(\epsilon |b_i|)}{\max_j |b_j|} = \frac{\epsilon \max_i |b_i|}{\max_j |b_j|} = \epsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}.$$

Die Norm von A berechnet sich zu

$$\|A\|_\infty = \max\{1 + 9 + |-90|,\ |-11| + 0 + 9,\ 88 + |-11| + 1\} = \max\{100,\ 20,\ 100\} = 100.$$

Damit gilt gemäß Hinweis und Definition für die Kondition

$$\kappa_\infty(A) := \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 100 \cdot 2.72 = 272,$$

insgesamt also

$$r_\infty(x) \leq \kappa_\infty(A) \cdot r_\infty(b) \leq 272 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} = 0.136.$$

Teil b) Die Skalierungsfaktoren $s_i := \sum_{j=1}^{3} |a_{i,j}|$ sind bereits in a) für $\|A\|_\infty$ berechnet worden, und zwar zu

$$s_1 = 100, \qquad s_2 = 20.0, \qquad s_3 = 100,$$

wobei sich die 3–stellige GPA nicht auswirkt. Also lautet die Skalierungsmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0.0100 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0500 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0100 \end{pmatrix}$$

und die skalierte Matrix sowie die skalierte rechte Seite

$$\tilde{A} := D\,A = \begin{pmatrix} 0.0100 & 0.0900 & -0.900 \\ -0.550 & 0.00 & 0.450 \\ 0.880 & -0.110 & 0.0100 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} := D\,b = \begin{pmatrix} -0.108 \\ -0.120 \\ 0.287 \end{pmatrix}.$$

Für die anschließende Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung erhalten wir in 3–stelliger GPA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.0100 & 0.0900 & -0.900 & -0.105 \\ -0.550 & 0.00 & 0.450 & -0.120 \\ 0.880 & -0.110 & 0.0100 & 0.287 \end{array}\right) \overset{Z_1 \leftrightarrow Z_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0.880 & -0.110 & 0.0100 & 0.287 \\ -0.550 & 0.00 & 0.450 & -0.120 \\ 0.0100 & 0.0900 & -0.900 & -0.105 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[l_{3,1}=0.0114]{l_{2,1}=-0.625} \left(\begin{array}{ccc|c} 0.880 & -0.110 & 0.0100 & 0.287 \\ 0.00 & -0.0688 & 0.456 & 0.0590 \\ 0.00 & 0.0913 & -0.900 & -0.108 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0.880 & -0.110 & 0.0100 & 0.287 \\ 0.00 & 0.0913 & -0.900 & -0.108 \\ 0.00 & -0.0688 & 0.456 & 0.0590 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{l_{3,2}=-0.754} \left(\begin{array}{ccc|c} 0.880 & -0.110 & 0.0100 & 0.287 \\ 0.00 & 0.0913 & -0.900 & -0.108 \\ 0.00 & 0.00 & -0.223 & -0.0224 \end{array}\right)$$

Rückwärtseinsetzen liefert in 3–stelliger GPA

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{-0.0224}{-0.223} = 0.100, \\ x_2 &= \frac{-0.108 - (-0.900) \cdot 0.100}{0.0913} = \frac{-0.108 + 0.0900}{0.0913} = \frac{-0.018}{0.0913} = -0.197, \\ x_1 &= \frac{0.287 - (-0.110) \cdot (-0.197) - 0.0100 \cdot 0.100}{0.880} = \frac{0.287 - 0.0217 - 0.00100}{0.880} \\ &= \frac{0.265 - 0.00100}{0.880} = \frac{0.264}{0.880} = 0.300. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der exakten Lösung $(0.3, -0.2, 0.1)^T$ liefert einen relativen Fehler von $r_\infty(x) = 0.01$, obwohl die Kondition $\kappa_\infty(\tilde{A}) = 94.5$ immer noch schlecht ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ soll interpoliert werden. Gegeben ist folgende Tabelle:

x	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75
$f(x)$	1.0314	1.2947	1.8884	2.9642	4.7966	7.8533

a) Gesucht ist ein Näherungswert für $f(1.0)$ mit dem Neville–Aitken–Schema unter Benutzung aller Tabellenwerte. Ergänzen Sie dazu das folgende Tableau:

$$
\begin{array}{r|lclclclclcl}
x_0 = 0.25 & 1.0314 & & & & & & & & & & \\
& & \searrow & & & & & & & & & \\
x_1 = 0.75 & 1.2947 & \rightarrow & 1.42632 & & & & & & & & \\
& & \searrow & & \searrow & & & & & & & \\
x_2 = 1.25 & P_{2,0} & \rightarrow & 1.59155 & \rightarrow & 1.55025 & & & & & & \\
& & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_3 = 1.75 & 2.9642 & \rightarrow & 1.35054 & \rightarrow & P_{3,2} & \rightarrow & 1.54077 & & & & \\
& & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_4 = 2.25 & 4.7966 & \rightarrow & P_{4,1} & \rightarrow & 1.63427 & \rightarrow & 1.54846 & \rightarrow & 1.54366 & & \\
& & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_5 = 2.75 & 7.8533 & \rightarrow & \text{-2.84521} & \rightarrow & 2.51124 & \rightarrow & P_{5,3} & \rightarrow & 1.54092 & \rightarrow & P_{5,5}
\end{array}
$$

Welchen Grades ist das Polynom, das dem Wert von $P_{5,5}$ zu Grunde liegt?

b) Bestimmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.1)$ durch eine Newton–Interpolation vom Grad 3.

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie, **nicht** aber die Beziehung $f(0) = 1$ aus!

c) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für das in b) berechnete Interpolationspolynom für das Intervall $[-0.25, 0.25]$ an.

Hinweis: Führen Sie eine Extremwertbestimmung des Knotenpolynoms $\omega(x) = \prod(x - x_i)$ durch!

Teil a) Das Neville–Aitken-Schema ist rekursiv definiert durch

$$
\begin{aligned}
P_{i,0} &= f(x_i), \qquad 0 \le i \le n, \\
P_{i,k} &= \frac{x - x_{i-k}}{x_i - x_{i-k}}\, P_{i,k-1} + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-k}}\, P_{i-1,k-1} \\
&= P_{i,k-1} + \frac{P_{i-1,k-1} - P_{i,k-1}}{x_i - x_{i-k}}\,(x_i - x) \\
&= P_{i-1,k-1} + \frac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}}\,(x - x_{i-k}), \qquad 0 \le k \le i \le n.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für die geforderten Werte mit $x = 1.0$

$$
\begin{aligned}
P_{2,0} &= f(x_2) = 1.8884, \\
P_{4,1} &= P_{3,0} + \frac{P_{4,0} - P_{3,0}}{x_4 - x_3}\,(x - x_3) = 0.215600, \\
P_{3,2} &= P_{2,1} + \frac{P_{3,1} - P_{2,1}}{x_3 - x_1}\,(x - x_1) = 1.53130, \\
P_{5,3} &= P_{4,2} + \frac{P_{5,2} - P_{4,2}}{x_5 - x_2}\,(x - x_2) = 1.48811, \\
P_{5,5} &= P_{4,4} + \frac{P_{5,4} - P_{4,4}}{x_5 - x_0}\,(x - x_0) = 1.54284.
\end{aligned}
$$

Die Werte $P_{i,k}$ beruhen auf Polynomen k–ten Grades, somit hat das dem Wert $P_{5,5}$ zu Grunde liegende Polynom den Grad 5.

Teil b) Die Funktion $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ist achsensymmetrisch, also $f(-x) = f(x)$. Aufgrund der Fehlerformel

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{z \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(z)| \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|, \qquad x_0 \leq x \leq x_n,$$

für ein Interpolationspolynom vom Grad n wird der das Knotenpolynom $\omega_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ betreffende Anteil minimal durch die Wahl $x_0 = -0.75$, $x_1 = -0.25$, $x_2 = 0.25$ und $x_3 = 0.75$ für $n = 3$. Das rekursive Schema der dividierten Differenzen

$$\begin{aligned} [x_i]\, f &= f(x_i), \qquad 0 \leq i \leq n, \\ [x_i, \ldots, x_{i+k+1}]\, f &= \frac{[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k+1}]\, f - [x_i, \ldots, x_{i+k}]\, f}{x_{i+k+1} - x_i}, \qquad 0 \leq i \leq n-k-1, \end{aligned}$$

ergibt sich zu

$$\begin{array}{r|lllllll}
x_0 = -0.75 & f(x_0) = 1.2947 & & & & & & \\
 & & > & -0.5266 & & & & \\
x_1 = -0.25 & f(x_1) = 1.0314 & & & > & 0.5266 & & \\
 & & > & 0.0 & & & > & 0.0 \\
x_2 = 0.25 & f(x_2) = 1.0314 & & & > & 0.5266 & & \\
 & & > & 0.5266 & & & & \\
x_3 = 0.75 & f(x_3) = 1.2947 & & & & & &
\end{array}$$

Damit erhalten wir für das Interpolationspolynom

$$\begin{aligned} P_3(x) &= [x_0]\, f + (x - x_0)\left([x_0, x_1]\, f + (x - x_1)\left([x_0, x_1, x_2]\, f + (x - x_2)\, [x_0, x_1, x_2, x_3]\, f\right)\right) \\ &= 1.2947 + (x + 0.75)\left(-0.5266 + (x + 0.25)\left(0.5266 + (x - 0.25) \cdot 0.0\right)\right), \end{aligned}$$

welches ausgewertet

$$P_3(0.1) = 1.00375$$

ergibt.

Teil c) Für die Fehlerformel (mit $n = 3$ aus b) muß das Maximum über $x \in [-0.25, 0.25$ gebildet werden, also

$$\max_{x \in [-0.25, 0.25]} |f(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \max_{z \in [-0.75, 0.75]} |f^{(4)}(z)| \max_{x \in [-0.25, 0.25]} |\omega_4(x)|$$

mit dem Knotenpolynom

$$\omega_4(x) := \prod_{i=0}^{3}(x - x_i) = (x + 0.75)\,(x + 0.25)\,(x - 0.25)\,(x - 0.75) = (x^2 - 0.5625)\,(x^2 - 0.0625).$$

Dieses hat die Anleitung

$$\omega_4'(x) = 4\,x\,(x^2 - 0.3125) = 4\,x\,(x - \sqrt{0.3125})\,(x + \sqrt{0.3125}),$$

also die Extremalstellen 0 sowie $\pm\sqrt{0.3125} = \pm 0.55902$. Lediglich die erste liegt im Intervall $[-0.25, 0.25]$, und wegen $\omega_4(\pm 0.25) = 0$ gilt somit

$$\max_{x \in [-0.25, 0.25]} |\omega_4(x)| = \omega_4(0) = 0.035156.$$

Weiterhin gilt

$$f'(x) = \sinh(x), \quad f''(x) = \cosh(x), \qquad f'''(x) = \sinh(x), \quad f^{(4)}(x) = \cosh(x).$$

Da die vierte Ableitung achsensymmetrisch zu $x = 0$ sowie positiv und monoton steigend für $x \geq 0$ ist, gilt

$$\max_{z \in [-0.75, 0.75]} |f^{(4)}(z)| = f^{(4)}(0.75) = 1.2947,$$

und damit insgesamt

$$\max_{x \in [-0.25, 0.25]} |f(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{24} \cdot 1.2947 \cdot 0.035156 = 0.18965 \cdot 10^{-2}.$$

Damit liefert P_3 in diesem Intervall auf 2 Stellen genaue Ergebnisse.

Aufgabe 3 (4.5 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung für das Integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\cos(x)\,dx.$$

a) Bestimmen Sie mit der summierten Trapezregel eine Näherung so, dass der Fehler garantiert kleiner als $2 \cdot 10^{-2}$ ist.

b) Wieviele Unterteilungen sind für die summierte Simpsonregel erforderlich, damit die Näherung maximal um 10^{-5} vom exakten Integralwert abweicht?

$$f(x) = \sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) \longrightarrow f''(x) = -2\sin(2x) \longrightarrow f^{(4)}(x) = 8\sin(2x)$$

a) Wir können die 2. Ableitung betragsmäßig offensichtlich durch 2 abschätzen. Daher gilt für den Fehler der summierten Trapezregel

$$f_{STR} \le \frac{\pi/2-0}{12} h_{STR}^2 \cdot \max_{t\in[0,\pi/2]} |f''(t)| \le \frac{\pi}{24} h_{STR}^2 \cdot 2 \overset{!}{\le} 2\cdot 10^{-2} \overset{h_{STR}>0}{\Longleftrightarrow} h_{STR} \le 0.276...$$

Womit aus $h_{STR} = (\pi/2-0)/n_{STR}$ folgt:

$$n_{STR} \ge 5.6... \;\text{ also }\; n_{STR} = 6 \;\text{ und somit }\; h_{STR} = \frac{\pi}{12}.$$

Wir nutzen die Symmetrie von $\sin(2x)$ auf $[0,\pi/2]$ bezüglich $\pi/4$ aus und erhalten

$$I_{STR} = \frac{\pi}{12}\left[2\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{12}\left[2\left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{2}\right] = 0.4885$$

b) Wir können die 4. Ableitung betragsmäßig offensichtlich durch 8 abschätzen. Daher gilt für den Fehler der summierten Simpsonregel

$$f_{SSR} \le \frac{\pi/2-0}{2880} h_{STR}^4 \cdot \max_{t\in[0,\pi/2]} |f^{(4)}(t)| \le \frac{\pi}{5760} h_{SSR}^4 \cdot 8 \overset{!}{\le} 10^{-5} \overset{h_{SSR}>0}{\Longleftrightarrow} h_{SSR} \le 0.218...$$

Womit aus $h_{STR} = (\pi/2-0)/n_{STR}$ folgt:

$$n_{STR} \ge 7.1... \;\text{ also }\; n_{STR} = 8.$$

Aufgabe 4 (4.5 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'''(t) - \frac{y(t)}{t\,y''(t)} = 0, \qquad y(0.3) = 0.5,\;\; y'(0.3) = 1,\;\; y''(0.3) = 0.5.$$

a) Berechnen Sie mit drei Schritten des expliziten Euler–Verfahrens jeweils eine Approximation von $y(0.9)$ und $y'(0.9)$.

b) Geben Sie auch eine Näherung für $y'''(0.9)$ an.

---

a) Expliziter Euler: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$.
$0.3 \to 0.9$ mit 3 Schritten, also $t_0 = 0.3$ und $h = 0.2$.
Nun schreiben wir die Differentialgleichung als System:

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}(t)) = \boldsymbol{z}'(t) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \frac{z_1}{t \cdot z_3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{z}_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt die Iteration ($\boldsymbol{z}_{i+1} = \boldsymbol{z}_i + 0.2 \cdot \boldsymbol{f}(t_i, \boldsymbol{z}_i)$, $\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}(t_i, \boldsymbol{z}_i)$)

$$\boldsymbol{f}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 3.\overline{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{z}_1 = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.1 \\ 1.1\overline{6} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.1\overline{6} \\ 1.2 \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} 0.92 \\ 1.\overline{3} \\ 1.40\overline{6} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1.\overline{3} \\ 1.40\overline{6} \\ 0.934326 \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{z}_3 = \begin{pmatrix} 1.18\overline{6} \\ 1.614\overline{6} \\ 1.59353 \end{pmatrix}$$

Und somit

$$y(0.9) \approx 1.18\overline{6} \quad \text{und} \quad y'(0.9) \approx 1.614\overline{6}.$$

b)

$$y'''(0.9) = \frac{y(0.9)}{0.9 \cdot y''(0.9)} \approx \frac{1.18\overline{6}}{0.9 \cdot 1.59353} = 0.827419$$