Aufgabe 1 (11 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 22 & 743 & -235 \\ 5 & -2.99 & 2.01 \\ 4 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Skalieren Sie A.

b) Berechnen Sie die LR–Zerlegung mit Pivotisierung zu der skalierten Matrix aus a).

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\,x = b$ mittels der in a) und b) gewonnen Resultate, d.h. über LR–Zerlegung mit Skalierung und Pivotisierung.

d) Berechnen Sie die Determinante von A.

e) Die Lösung des Gleichungssystem $A\,x = b$ mit Gaußelimination und Pivotisierung in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik ist $x_G = (0.909, -1.78, -5.52)^T$. Warum ist dieses Ergebnis mit einem so großen Fehler behaftet? **Hinweis:** Die 1- und die ∞-Norm von A^{-1} sind in der Größenordnung 3.5.

Teil a) Die Zeilensummen der Beträge von A als Skalierungsvektor $s = (100, 10, 5)^T$. Und somit $A \rightarrow A_s = diag(1/s[1], 1/s[2], 1/s[3]) \cdot A$

$$A_s = \begin{pmatrix} 0.022 & 0.743 & -0.235 \\ 0.5 & -0.299 & 0.201 \\ 0.8 & -0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Teil b) Pivotzeile 3: Pivotvektor $\rightarrow (3, 2, 1)^T$ und $L_{21} = 0.625$ sowie $L_{31} = 0.0275$:

$$A_s \rightarrow R_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & 0.1 \\ 0 & -0.2365 & 0.1385 \\ 0 & 0.74575 & -0.23775 \end{pmatrix}$$

Pivotzeile 3: Pivotvektor $\rightarrow p = (3, 1, 2)^T$ (d.h.: L_{21} und L_{31} vertauschen!) und $L_{32} = -0.31713$:

$$R_1 \rightarrow R =_5 \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.74575 & -0.23775 \\ 0 & 0 & 0.063102 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0275 & 1 & 0 \\ 0.625 & -0.31713 & 1 \end{pmatrix}$$

Teil c) Wir müssen zunächst die Skalierung und Pivotisierung in b einarbeiten: $b \rightarrow \tilde{b}$ mit $\tilde{b}_i = b_{p_i}/s_{p_i}$, also $\tilde{b} = (0.6, 0.002, 0.1)^T$. Danach Vorwärts- Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0275 & 1 & 0 \\ 0.625 & -0.31713 & 1 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.002 \\ 0.1 \end{pmatrix} \rightarrow y =_5 \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.0145 \\ -0.27960 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.74575 & -0.23775 \\ 0 & 0 & 0.063102 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0.6 \\ -0.0145 \\ -0.27960 \end{pmatrix} \rightarrow x =_5 \begin{pmatrix} 1.1249 \\ -1.4320 \\ -4.4309 \end{pmatrix}$$

Teil d) Zwei Zeilenvertauschungen, also kein Vorzeichenwechsel; aber skaliert:

$$\det(A) = \prod s_i \cdot \prod R_{ii} = 50000 \,\cdot\, 0.8 \cdot 0.74575 \cdot 0.063102 =_5 1882.3$$

Teil e) $\|A\|_\infty = \max\{s_i\} = 1000 \rightarrow \kappa_\infty(A) \approx 3500 \quad (3598.3)$. Die Kondition ist also so schlecht, dass wir mit einem Verlust von bis zu drei Stellen rechnen müssen.

Aufgabe 2 (9 Punkte)
Bestimmen Sie eine Näherungslösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + 3\,y &= \sin x \\ e^{-y}\cos x &= 3\,x \end{aligned} \;.$$

a) Stellen Sie dazu eine geeignete Fixpunktgleichung auf, und zeigen Sie, daß diese den Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt. Starten Sie Ihre Untersuchungen in dem Gebiet $D = [0, 2/3] \times [-2/3, 2/3]$.

b) Ausgehend von einem geeignetem Startvektor führe man 2 Iterationen aus und gebe eine a-posteriori Fehlerabschätzung an.

Teil a) Umstellen auf ein Fixpunktproblem:

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-y}\cdot\cos x \\ \sin x - \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

Hinweis: Man sieht leicht: $y \in [-2/3, 2/3]$ und damit $x \in [-1/3e^{2/3}, 1/3e^{2/3}] \subset [-0.65, 0.65]$ und somit auch $x \in [0, 0.65]$ da $\cos([-0.65, 0.65]) > 0$. (**NICHT VERLANGT!**)

i) Auf D gilt: $F_1(x,y) \in [F_1(2/3, 2/3), F_1(0, -2/3)] = 1/3 \cdot [e^{-2/3}\cos(2/3), e^{2/3}] = [0.1345, 0.6492]$ und $F_2(x,y) \in 1/3 \cdot [0-1, \sin 2/3 - \cos 4/3] = [-1/3, 0.12771]$. Und somit $F(D) \subset D' := [0.13, 0.65] \times [-1/3, 0.13] \subset D$.

ii) Wenn F Fixpunkte hat, können diese nur in D' liegen. D' ist konvex und abgeschlossen, betrachte also die Ableitung auf D':

$$F'(x,y) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^{-y}\sin x & -e^{-y}\cos x \\ \cos x + \sin(x+y) & \sin(x+y) \end{pmatrix}.$$

Wir schätzen zunächst die Beträge der Einträge von F' komponentenweise auf D' ab:

$$|F'(x,y)|_. \leq_. \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{1/3}\sin 0.65 & e^{1/3}\cos 0.13 \\ \cos 0.13 + \sin(0.65+0.13) & \sin(0.65+0.13) \end{pmatrix} <_. \begin{pmatrix} 0.28154 & 0.46128 \\ 0.56495 & 0.23443 \end{pmatrix}.$$

Und somit gilt auf D' : $\qquad \|F'(x,y)\|_\infty < 0.56495 + 0.23443 < 0.8 =: \alpha.$

Somit sind die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes nachgewiesen.

Teil b) Wir platzieren den Startwert ungefähr in der Mitte von D': $\boldsymbol{x}_0 = (0.4, -0.1)^T$. Daraus folgt dann $\boldsymbol{x}_1 = (0.33931, -0.18864)^T$ und $\boldsymbol{x}_2 = (0.37958, -0.21861)^T$.
Für die a-posteriori Fehlerabschätzung erhalten wir die Differenz der letzten beiden Iterierten als $\boldsymbol{\Delta x}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = (0.04027, -0.029972)T$ und somit $\|\boldsymbol{\Delta x}_2\|_\infty = 0.0403$. Folglich gilt $\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}^*\|_\infty \leq 0.8/0.3 \cdot 0.0403 = 0.1612$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Gegeben seien Meßwerte

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & 1 & 2 & 4 \\ \hline f_i & 0.2 & 0.7 & 0.6 \end{array} \quad ,$$

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = e^{-\lambda(t-a)^2}$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$ explizit auf (Meßwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß–Newton–Verfahren seien die Startwerte $a_0 = 3$, $\lambda_0 = 0.5$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? Geben Sie die Werte 3-stellig an. (Der erste Schritt muß nicht durchgeführt werden.)

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen. Geben Sie das Residuum explizit an.

Teil a) Mit $x = (\lambda, a)$ lautet das nicht lineare Ausgleichsproblem

$$\|F(x)\|_2 = \|F(\lambda, a)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} e^{-\lambda(1-a)^2} - 0.2 \\ e^{-\lambda(2-a)^2} - 0.4 \\ e^{-\lambda(4-a)^2} - 0.6 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min$$

Teil b) Eine Zeile der Jakobischen zu F lautet

$$\operatorname{grad}_{[\lambda,a]}(f) = \left(-(t-a)^2 \cdot e^{-\lambda\cdot(t-a)^2} \qquad 2 \cdot \lambda \cdot (t-a) \cdot e^{-\lambda\cdot(t-a)^2} \right)$$

Da außerdem nach a) F bekannt und somit

$$F(0.5, 3) =_3 \begin{pmatrix} -0.0647 \\ -0.0935 \\ 0.00653 \end{pmatrix}$$

ist, fehlt für den ersten Schritt ($\|F'(x_0) \cdot \Delta x_0 - (-F(x_0)\|_2 \to \min$) nur noch $F'(x_0)$:

$$F'(0.5, 3) =_3 \begin{pmatrix} -0.541 & -0.271 \\ -0.607 & -0.607 \\ -0.606 & 0.607 \end{pmatrix}$$

Teil c)

$$(\,A|b\,) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.8 & 0.7 & 0.5 \\ 0.6 & 0.6 & 1 \\ 1 & 2 & 1.4 \end{array}\right)$$

Spalte 1, Zeile 2 : $\quad r = \sqrt{0.8^2 + 0.6^2} = 1, \quad c = 0.8, \quad s = 0.6$

$$(\,A|b\,) \to (\,A|b\,)_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0.92 & 1 \\ 0 & 0.06 & 0.5 \\ 1 & 2 & 1.4 \end{array}\right)$$

Spalte 1, Zeile 3: $\quad r = \sqrt{2}, \quad c = s = 1/\sqrt{2} = 0.7071$:

$$(\,A|b\,)_1 \to (\,A|b\,)_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 1.4142 & 2.0648 & 1.697 \\ 0 & 0.06 & 0.5 \\ 0 & 0.7637 & 0.2828 \end{array}\right)$$

Spalte 2, Zeile 3: $r = \sqrt{0.06^2 + 0.7637^2} = 0.7660, \quad c = 0.07833, \quad s = 0.9969$

$$(\,A|b\,)_2 \to (\,A|b\,)_3 = \begin{pmatrix} 1.4142 & 2.0648 & | & 1.697 \\ 0 & 0.7660 & | & 0.3211 \\ 0 & 0 & | & -0.4763 \end{pmatrix}$$

Durch Rückwärtseinssetzen erhalten wir $x = (0.5879, 0.4192)^T$ und das Residuum ist 0.4763.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung des Integrals

$$I = \int_{0.8}^{2.8} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx.$$

a) Wieviele Unterteilungen (n) sind höchstens erforderlich, um mit der summierten Trapezregel eine Genauigkeit von 10^{-5} zu erreichen?

b) Berechnen Sie für die summierte Trapezregel zum obigen Integral Näherungen mit $n = 1, 2, 4$ und führen Sie danach eine geeignete vollständige Extrapolation durch. Wie läßt sich der Fehler jetzt schätzen?

Teil a) Für den Fehler der summierten Trapezregel gilt

$$|I(f) - Q(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{z\in[a,b]} |f''(z)|$$

Für die Ableitungen erhalten wir:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \to f''(x) = (x^2-1)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \to f^{(3)}(x) = x(x^2-3)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Somit hat f'' auf $[0.8, 2.8]$ ein lokales Extremum bei $x = \sqrt{3}$. Da weiter:

$$f''(\sqrt{3}) = 0.44626, \quad f''(0.8) = -0.2... \;\text{ und }\; f''(2.8) = 0.1...$$

ist, gilt also

$$|I(f) - Q(f)| \leq \frac{2}{12} h^2 0.44626 \overset{!}{\leq} 10^{-5}.$$

Dies ist für $h \leq \sqrt{6\cdot 10^{-5}/0.44626} = 0.0.11595$ erfüllt. Folglich $n > 2/h = 172.4...$ und somit $n = 173$.

Teil b) Wir brauchen die Funktionswerte an den Stellen $x = 0.8, 1.3, 1.8, 2.3, 2.8$:

x_i	0.8	1.3	1.8	2.3	2.8
f_i	0.726149037	0.429557358	0.197898699	0.0710053537	0.0198410947

.

Daraus erhalten wir für die summierten Regeln

$$Q_1 = \tfrac{2}{2}(0.72614903 + 0.019841094) = 0.7459901$$

$$Q_2 = \tfrac{1}{2}(0.72614903 + 2\cdot 0.19789870 + 0.019841094) = 0.57089377$$

$$Q_4 = \tfrac{0.5}{2}(0.72614903 + 2\cdot 0.42955736 + 2\cdot 0.19789870 + 2\cdot 0.071005353 + 0.019841094) = 0.53572824$$

Dies führt auf folgendes Romberg–Tableau (T_{ii}):

0.7459901320		
0.5708937651	0.5125283093	
0.5357282385	0.5240063963	0.5247716021

Der beste verfügbare Wert ist somit $T_{22} = 0.5247716021$. Den Fehler können wir mit $|T_{22} - T_{21}| = |0.5247716021 - 0.5240063963| \approx 0.765\cdot 10^{-3}$ schätzen.

Bemerkung: Dies ist eigentlich ein Fehlerschätzer für den Wert $T_{21} = 0.5240063963$. Da aber T_{22} eine Approximation noch höhere Ordnung ist (theoretisch 6 gegenüber 4), können wir dies auch als Fehlerschätzung für T_{22} nehmen.