Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.0 & 0.1 \\ 1.2 & 2.4 & 0.6 \\ 0.6 & 2.8 & -0.7 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 3.6 \\ 5.0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung, Geben sie L und R explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung.

c) Berechnen Sie die Kondition κ von A bzgl. der ∞-Norm.
(**Hinweis:** Es gilt $\|A^{-1}\|_\infty \approx 2.604$.)

d) Betrachten Sie nun das gestörte Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Wie groß darf der relative Fehler $\|b - \tilde{b}\|_\infty / \|b\|_\infty$ höchstens sein, damit der relative Fehler $\|x - \tilde{x}\|_\infty / \|x\|_\infty$ nicht größer als 5% ist?

Teil a)

Pivotzeile 2: Pivotvektor $\rightarrow (2,1,3)^T$ und $L_{21} = -0.33333$ sowie $L_{31} = 0.4$:

$$A \rightarrow R_1 = \begin{pmatrix} 1.2 & 2.4 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.3 \\ 0 & 1.6 & -1 \end{pmatrix}$$

Pivotzeile 3: Pivotvektor $\rightarrow p = (2,3,1)^T$ (d.h.: L_{21} und L_{31} vertauschen!) und $L_{32} = 0.5$:

$$R_1 \rightarrow R = \begin{pmatrix} 1.2 & 2.4 & 0.6 \\ 0 & 1.6 & -1 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.33333 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Teil b)

Vertausche b gemäß p

$$b \rightarrow \begin{pmatrix} 3.6 \\ 5 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

Vorwärtseinsetzen

$$\rightarrow y = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 3.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen

$$\rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teil c)

$\|A\|_\infty = \max\{0.5,\ 4.2,\ 4.1\} = 4.2 \rightarrow \kappa_\infty(A) = 4.2 \cdot 2.604 = 10.94$

Teil d)

$r_x \leq \kappa(A) \cdot r_b \overset{!}{\leq} 5\%$ d.h. mit $r_b \leq 5\%/10.94 = 0.457\%$ können wir die gewünschte Genauigkeit in x garantieren.

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Gegeben seien

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem $Mx = b$ soll mit Hilfe einer LDL^T–Zerlegung der Matrix M gelöst werden.

a) Geben Sie an, welche Einträge in der Matrix L aufgrund der speziellen Struktur von M überhaupt berechnet werden müssen. Begründen Sie ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie die LDL^T–Zerlegung von M mit Hilfe des Cholesky–Verfahrens. Geben Sie L und D explizit an.

c) Für welche Werte von α ist M positiv definit?

d) Lösen Sie das Gleichungssystem $Mx = b$ mit Hilfe der in Aufgabenteil b) berechneten Zerlegung für $\alpha = 2$.

---

a) Die Matrix M besteht aus zwei Blöcken, die getrennt voneinander behandelt werden können. Daher braucht man nur die Elemente $\ell_{2,1}, \ell_{3,1}, \ell_{3,2}$ sowie $\ell_{5,4}$ zu berechnen.

b) Wir zerlegen zunächst die Teilmatrix

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
d_{1,1} &= m_{1,1} = 3 \\
\ell_{2,1} &= \frac{m_{2,1}}{d_{1,1}} = \frac{1}{3} \\
\ell_{3,1} &= \frac{m_{3,1}}{d_{1,1}} = \frac{2}{3} \\
d_{2,2} &= m_{2,2} - \sum_{j=1}^{1} \ell_{2,j}^2 \cdot d_{j,j} = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 3 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \\
\ell_{3,2} &= \frac{1}{d_{2,2}} \left(m_{3,2} - \sum_{j=1}^{1} \ell_{3,j} \cdot d_{j,j} \cdot \ell_{2,j} \right) = \frac{3}{8} \left(1 - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{8} \\
d_{3,3} &= m_{3,3} - \sum_{j=1}^{2} \ell_{3,j}^2 \cdot d_{j,j} = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 3 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{13}{8}
\end{aligned}$$

Anschließend zerlegen wir

$$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ \alpha & 3 \end{pmatrix}.$$

Unter Beachtung der Indexverschiebung erhalten wir

$$\begin{aligned}
d_{4,4} &= m_{4,4} = 3 \\
\ell_{5,4} &= \frac{m_{5,4}}{d_{4,4}} = \frac{\alpha}{3} \\
d_{5,5} &= m_{5,5} - \sum_{j=4}^{4} \ell_{5,j}^2 \cdot d_{j,j} = 3 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 \cdot 3 = 3 - \frac{1}{3}\alpha^2
\end{aligned}$$

Damit ist

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{8} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \operatorname{diag}\left(3, \frac{8}{3}, \frac{13}{8}, 3, 3 - \frac{\alpha^2}{3}\right).$$

c) Die Matrix M ist genau dann positiv definit, wenn $d_{i,i} > 0$, $i = 1, \ldots, 5$, gilt. Dies ist der Fall, wenn $3 - \frac{1}{3}\alpha^2 > 0$ gilt, also für $|\alpha| < 3$.

d) Nach c) ist M für $\alpha = 2$ nicht–singulär, d. h. das Gleichungssystem $Mx = b$ besitzt genau eine Lösung. Wir lösen das Gleichungssystem durch Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen, also $Ly = b$, $z = D^{-1}y$ und schließlich $L^T x = z$. Auf diese Weise erhalten wir $y = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{3}\right)^T$, $z = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{13}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)^T$ und $x = \left(\frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \frac{2}{13}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)^T$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sind die drei Meßwerte

t_i	0	2	3
y_i	3	1	1

,

die der Theorie nach zu einer Funktion der Form

$$y(t) = \alpha \frac{1}{1+t} + \beta\, t$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|A\,x - b\|_2 \to \min$ auf. Geben Sie A und b explizit an.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mittels Givensrotationen. Geben Sie die Lösung $y(t)$ sowie das Residuum explizit an.

Zu a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 2 \\ \frac{1}{4} & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Zu b)

Eliminiere a_{21} : $r = 1.0541 \to s = 0.31622 \to c = 0.94868$

$$\to \begin{pmatrix} 1.0541 & .63244 & | & 3.1622 \\ 0 & 1.8974 & | & 0 \\ 0.25 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Eliminiere a_{31} : $r = 1.0833 \to s = 0.23078 \to c = 0.97305$

$$\to \begin{pmatrix} 1.0833 & 1.3077 & | & 3.3078 \\ 0 & 1.8974 & | & 0 \\ 0 & 2.7732 & | & 0.24328 \end{pmatrix}$$

Eliminiere a_{32} : $r = 3.3602 \to s = 0.82531 \to c = 0.56467$

$$\to \begin{pmatrix} 1.0833 & 1.3077 & | & 3.3078 \\ 0 & 3.3602 & | & 0.20079 \\ 0 & 0 & | & 0.13735 \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen liefert

$$x = \begin{pmatrix} 2.9811 \\ 0.059757 \end{pmatrix}$$

Also: $y(t) = 2.9811 \dfrac{1}{1+t} + 0.059757 \cdot t$. Das Residuum ist 0.13735.

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Gegeben ist das nichtlineare Gleichungssystem

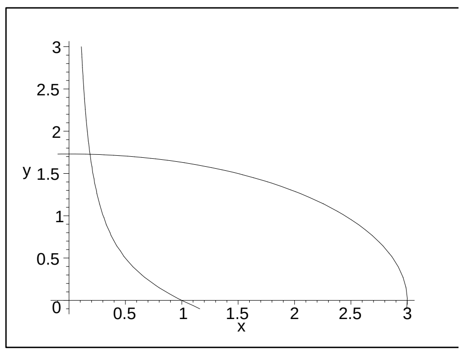
$$\begin{pmatrix} x^2 + 3\,x\,y \\ x^2 + 3\,y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Besimmen Sie mit dem Fixpunktverfahren die (eindeutige) Lösung im ersten Quadranten auf eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-3}$, und führen Sie für die letzte Iterierte eine a-posteriori Fehlerabschätzung durch.
Hinweis: Bestimmen sie (mittels einer Skizze) zunächst ein Gebiet $D = [a, b] \times [c, d]$ mit ganzen Zahlen a, b, c und d, in dem der Fixpunkt liegt. Weisen Sie dann die Abbildung von D in ein Teilgebiet $D' \subset D$ nach. Zeigen Sie dann die Kontraktivität in D'. Runden Sie Ihren Startwert (in beiden Komponenten) auf eine Nachkommastelle.

Lösung:

$$x^2 + 3\,x\,y = 1 \overset{\text{(hat für } x=0 \text{ keine Lösung)}}{\Longleftrightarrow} y(x) = \frac{1 - x^2}{3\,x} \text{ (Pol bei } x = 0\text{, Nullstelle bei } x = 1\text{, } y(0.5) = 0.5)$$

$$x^2 + 3\,y^2 = 9 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{\sqrt{3}^2} = 1 \text{ (Ellipse in Normallage, Hauptachslängen 3 und } \sqrt{3})$$



Somit ist das Startgebiet $D = [0, 1] \times [1, 2]$ (konvex und abgeschlossen).
Um bei der Fixpunktgleichung jeweils den Faktor $1/3$ zu erhalten (Kontraktion), müssen wir die zweite Gleichung nach y und somit die erste nach x auflösen.

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1 - x^2}{3\,y} \\ \dfrac{1}{3}\sqrt{27 - 3\,x^2} \end{pmatrix} \to F'(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-2\,x}{3\,y} & -\dfrac{1 - x^2}{3\,y^2} \\ \dfrac{-x}{\sqrt{27 - 3\,x^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Selbstabbildung: Für $(x, y) \in D$ gilt: $F_1(x, y) \in [0, 1/3]$ und $F_2(x, y) \in 1/3\,[\sqrt{27 - 3}, \sqrt{27}] = [1.633, \sqrt{3}]$. Also wird D in $D' = [0, 1/3] \times [1.63, \sqrt{3}] \subset D$ abgebildet.

Kontraktion:

$$|F'(x, y)|. \leq. \begin{pmatrix} \dfrac{2 \cdot 1/3}{3 \cdot 1.63} & \dfrac{1}{3 \cdot 1.63^2} \\ \dfrac{1/3}{\sqrt{27 - 3\,(1/3)^2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.13633 & 0.12546 \\ 0.064550 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit gilt $\|F'(x, y)\|_\infty \leq 0.26179 < 0.27 =: L$ (auf D'), und die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind erfüllt.

Als Startwert wählen wir $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^T = (0.2, 1.7)^T$ und erhalten $\mathbf{x_1} = (x_1, y_1) = F(x_0, y_0) = (0.188235, 1.72820)^T$.
Aus der a-priori-Fehlerschätzung erhalten wir folgende Ungleichung für die Anzahl der benötigten Iterationen:

$$n \geq \frac{\ln\left(\dfrac{\epsilon(1 - L)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_\infty}\right)}{\ln L} = \frac{\ln\left(\dfrac{10^{-3}(1 - 0.27)}{0.0282}\right)}{\ln 0.27} = 2.7\ldots.$$

Es sind also $n = 3$ Schritte erforderlich. Die Iteration ergibt $\mathbf{x_2} = (0.186045, 1.72864)^T$ und $\mathbf{x_3} = (0.186155, 1.72872)$
Hieraus folgt für die a-posteriori Fehlerabschätzung

$$\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{L}{1 - L}\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\|_\infty = \frac{0.27}{0.73} \cdot 0.000110 = 0.0000407 < 0.5 \cdot 10^{=4}$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung des Integrals

$$I = \int_1^5 \ln(x^2+1)\,dx.$$

a) Wieviele Unterteilungen (n) sind höchstens erforderlich, um mit der summierten Trapezregel eine Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-3}$ zu erreichen?

b) Berechnen Sie für die summierte Trapezregel zum obigen Integral Näherungen mit $n = 2, 4, 8$. Führen Sie danach eine geeignete vollständige Extrapolation durch. Wie läßt sich der Fehler des zuletzt berechneten Wertes schätzen?

Teil a) Für den Fehler der summierten Trapezregel gilt

$$|I(f) - Q(f)| \le \frac{b-a}{12} h^2 \max_{z\in[a,b]} |f''(z)|$$

Für die Ableitungen erhalten wir:

$$f(x) = \ln(x^2+1) \to f'(x) = \frac{2\,x}{x^2+1} \to f''(x) = \frac{2-2\,x^2}{(x^2+1)^2} \to f'''(x) = \frac{4\,x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

Somit hat f'' auf $[1,5]$ ein lokales Extremum bei $x = \sqrt{3}$. Da weiter:

$$f''(\sqrt{3}) = -0.25, \quad f''(1) = 0 \;\text{ und }\; f''(5) = -0.07...$$

ist, gilt also

$$|I(f) - Q(f)| \le \frac{4}{12} h^2\, 0.25 \;= \frac{h^2}{12} \overset{!}{\le} 5\, 10^{-3}.$$

Dies ist für $h \le \sqrt{6 \cdot 10^{-2}} = 0.244949$ erfüllt. Folglich $n > 4/h = 16.3...$ und somit $n = 17$.

Teil b) Wir erhalten für die summierten Regeln

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \frac{4}{2\cdot 2}(\ln 2 + 2\,\ln 10 + \ln 26) = 8.556414 \\
Q_4 &= \tfrac{1}{2}Q_2 + (\ln 5 + \ln 17) = 8.720858 \\
Q_8 &= \tfrac{1}{2}Q_4 + \tfrac{1}{2}(\ln(1+1.5^2) + \ln(1+2.5^2) + \ln(1+3.5^2) + \ln(1+4.5^2)) = 8.760435
\end{aligned}$$

Dies führt auf folgendes Romberg–Tableau (T_{ii}):

8.556414		
8.720858	8.775673	
8.760435	8.773627	8.773490

Der beste verfügbare Wert ist somit $T_{22} = 8.773490$.
Den Fehler können wir mit $|T_{22} - T_{21}| = |8.773490 - 8.773627| \approx 0.14 \cdot 10^{-3}$ schätzen.
Bemerkung: Dies ist eigentlich ein Fehlerschätzer für den Wert $T_{21} = 8.773627$. Da aber T_{22} eine Approximation noch höherer Ordnung ist (theoretisch 6 gegenüber 4), können wir dies auch als Fehlerschätzung für T_{22} nehmen.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

a) Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y^{(4)}(t) = t^2 y''(t) + t y'(t) - 3y(t) + 3$$

mit Anfangswerten $y'''(1) = y'(1) = 2,\ y''(1) = y(1) = -1$.
Transformieren Sie die Differentialgleichung auf ein System erster Ordnung. Geben Sie auch die transformierten Anfangswerte an.

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{pmatrix} (z_2(t))^3 \\ t^2 z_1(t) + 3z_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit $\mathbf{z}(t) = \big(z_1(t), z_2(t)\big)^T$. Berechnen Sie mit dem expliziten Euler–Verfahren und der Schrittweite $h = 0.5$ sowie dem verbesserten Euler–Verfahren und der Schrittweite $\tilde{h} = 1$ jeweils eine Approximation von $\mathbf{z}(2)$.

---

1. Mit der Substitution $\mathbf{z}(t) := \big(y(t), y'(t), y''(t), y'''(t)\big)^T$ erhalten wir

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \\ y^{(4)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \\ t^2 y''(t) + t y'(t) - 3y(t) + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \\ t^2 z_3(t) + t z_2(t) - 3z_1(t) + 3 \end{pmatrix}.$$

Die transformierten Anfangswerte lauten $\mathbf{z}(1) = (-1, 2, -1, 2)^T$.

2. Wir definieren $\mathbf{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{z}) := \begin{pmatrix} (z_2)^3 \\ t^2 z_1 + 3z_2 \end{pmatrix}.$$

Die Iterationsvorschrift des expliziten Euler–Verfahrens lautet

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + h\,\mathbf{F}(t_k, \mathbf{z}^k), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Es ist $h = \frac{1}{2}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}^0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{z}^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{z}^2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ (\frac{3}{2})^2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/16 \\ 19/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0625 \\ 2.375 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Iterationsvorschrift des verbesserten Euler–Verfahrens lautet

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}^1 &= \mathbf{F}(t_k, \mathbf{z}^k), \\
\mathbf{z}^{k+1} &= \mathbf{z}^k + \tilde{h}\,\mathbf{F}\big(t_k + \tfrac{\tilde{h}}{2}, \mathbf{z}^k + \tfrac{\tilde{h}}{2}\mathbf{k}^1\big), \quad k \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Es ist $\tilde{h} = 1$ und mit den Ergebnissen des expliziten Euler–Verfahrens erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \mathbf{F}\left(\frac{3}{2}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ (\frac{3}{2})^2 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.125 \\ 3.75 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$