Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -0.4 & 2.8 & 0.1 \\ 0.6 & 0.0 & -0.7 \\ 1.2 & 2.4 & 1.2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.2 \\ 6.0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie L und R explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung.

c) Berechnen Sie die Kondition κ von A bzgl. der 1-Norm.
Hinweis: Es gilt $\|A^{-1}\|_1 \approx 1.642$.

d) Betrachten Sie nun das gestörte Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Wie groß darf der relative Fehler $\|b - \tilde{b}\|_1 / \|b\|_1$ höchstens sein, damit der relative Fehler $\|x - \tilde{x}\|_1 / \|x\|_1$ nicht größer als 2% ist?

Teil a)

Pivotzeile 3: Pivotvektor $\rightarrow (3, 2, 1)^T$ und $L_{21} = 0.5$ sowie $L_{31} = -0.33333$:

$$A \rightarrow R_1 = \begin{pmatrix} 1.2 & 2.4 & 1.2 \\ 0 & -1.2 & -1.3 \\ 0 & 3.6 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Pivotzeile 3: Pivotvektor $\rightarrow p = (3, 1, 2)^T$ (d.h.: L_{21} und L_{31} vertauschen!) und $L_{32} = -0.33333$:

$$R_1 \rightarrow R = \begin{pmatrix} 1.2 & 2.4 & 1.2 \\ 0 & 3.6 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1.1333 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.33333 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.33333 & 1 \end{pmatrix}$$

Teil b)

Vertausche b gemäß p

$$b \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 0.8 \\ -0.2 \end{pmatrix}$$

Vorwärtseinsetzen

$$\rightarrow y = \begin{pmatrix} 6 \\ 2.8 \\ -2.2667 \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen

$$\rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Teil c)

$\|A\|_1 = \max\{2.2,\ 5.2,\ 2\} = 5.2 \rightarrow \kappa_1(A) = 5.2 \cdot 1.642 = 8.539$

Teil d)

$r_x \leq \kappa(A) \cdot r_b \overset{!}{\leq} 2\%$ d.h. mit $r_b \leq 2\%/8.539 = 0.2342\%$ können wir die gewünschte Genauigkeit in x garantieren.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Lösen Sie approximativ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x^2y + 5y^2 - 6xy &= 10 \\ y^2 + xy &= 0.5 \end{aligned}$$

mittels zweier Iterationen sowohl des Newton-Verfahrens als auch des vereinfachten Newton-Verfahrens für Systeme. Benutzen Sie als Startwert jeweils

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 3\,x^2y + 5\,y^2 - 6xy - 10 \\ y^2 + x\,y - 0.5 \end{pmatrix} \rightarrow f'(x,y) = \begin{pmatrix} 6\,y\,(x-1) & 3\,x^2 + 10\,y - 6\,x \\ y & 2\,y + x \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren:

$$\text{Startwert: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 10 & | & 5 \\ 1 & 2 & | & -0.5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 10 & | & 5 \\ 0 & 3.66667 & | & 0.3333333 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\Delta x_0 = \begin{pmatrix} -0.681818 \\ 0.0909091 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} -0.68181818 \\ 1.090909 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -11.00826 & 16.39463 & | & -1.934636 \\ 1.090909 & 1.5 & | & 0.05371901 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -11.00826 & 16.39463 & | & -1.934636 \\ 0 & 3.124693 & | & -0.1380016 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\Delta x_1 = \begin{pmatrix} 0.1099691 \\ -0.04416486 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} -0.5718491 \\ 1.046744 \end{pmatrix}$$

Vereinfachtes Newton-Verfahren: (erster Schritt und rechte Seite von oben)

$$\begin{pmatrix} -6 & 10 & | & -1.934636 \\ 1 & 2 & | & 0.05371901 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -6 & 10 & | & -1.934636 \\ 0 & 3.66667 & | & -0.268720 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\Delta x_1 = \begin{pmatrix} 0.2002937 \\ -0.07328734 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} -0.4815245 \\ 1.017622 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y''(t) - y(t) - t^2 y'(t) - 2 = 0$$

mit Anfangswerten $y(0) = 2$ und $y'(0) = 1$.

Berechnen Sie mit dem impliziten Euler–Verfahren mittels zweier Schritte Approximationen für $y(2)$ und $y'(2)$.

Transformation:

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & t^2 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad z_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Impliziter Euler:

$$z_{i+1} = z_i + h \cdot f(t_{i+1}, z_{i+1})$$

Startwerte: $t_0 = 0$, $z_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit $(n = 2)$ $t_2 = 2$ folgt $h = 1$.

Da die Dgl. linear in z ist $(z'(t) = A(t) \cdot z(t) + v(t))$, können wir ein lineares Gleichungssystem für z_{i+1} aufstellen

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= z_i + h(A(t_{i+1}) z_{i+1} + V(t_{i+1})) \\ (E - h \cdot A(t_{i+1})) \cdot z_{i+1} &= z_i + h \cdot V(t_{i+1}) \\ a(h, t_{i+1}) \cdot z_{i+1} &= \tilde{z}_i \end{aligned}$$

Hier ist

$$\begin{aligned} a(h, t_{i+1}) &= \begin{pmatrix} 1 & -h \\ -h & 1 - h\, t_{i+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 - t_{i+1}^2 \end{pmatrix} \\ \tilde{y}_i &= y_i + h \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = y_i + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i	t_{i+1}	$a(h, t_{i+1})$	y_{i+1}
0	1	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$
1	2	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Für das Integral

$$I = \int_0^2 e^{\sin x} dx$$

sollen numerisch Näherungen bestimmt werden.

a) Wieviel Schritte (n) braucht man mit der

  i) summierten Mittelpunktregel,

  ii) summierten Trapezregel,

um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-4}$ zu erreichen? Schätzen Sie dazu die entsprechende Ableitung ab, ohne Extrema zu benutzen.

b) Bestimmen Sie mittels der summierten Simpsonregel eine Näherung für I mit einer garantierten Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-2}$.
Hinweis: Für $f(x) = e^{\sin x}$ gilt $\max_{\xi\in\mathbb{R}}|f^{(4)}(\xi)| = 4 \cdot e$.

---

zu a)

$$f(x) = e^{\sin x} \to f'(x) = \cos(x)e^{\sin x} \to f''(x) = (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x} \to |f''(x)| \leq 2\,e$$

Für den Fehler der summierten Mittelpunktsregel (auf $[0,2]$) gilt:

$$f_M \leq \frac{1}{24}h_M^2(2-0)\max_{x\in[0,2]}|f''(x)| \leq \frac{1}{24}h_M^2 4\,e \overset{!}{\leq} 10^{-4} \to h_M \leq 0.01485690630$$

Und somit

$$n_M \geq \frac{2-0}{0.01485690630} = 134.6.. \to n_M = 135$$

Für den Fehler der summierten Trapezpunktsregel (auf $[0,2]$) gilt:

$$f_T \leq \frac{1}{12}h_T^2(2-0)\max_{x\in[0,2]}|f''(x)| \leq \frac{1}{12}h_T^2 4\,e \overset{!}{\leq} 10^{-4} \to h_T \leq 0.01050541919$$

Und somit

$$n_T \geq \frac{2-0}{0.01050541919} = 190.3.. \to n_T = 191$$

zu b)

Für den Fehler der summierten Simpsonregel (auf $[0,2]$) gilt:

$$f_S \leq \frac{1}{2880}h_S^4(2-0)\max_{x\in[0,2]}|f^{(4)}(x)| \leq \frac{1}{2880}h_S^4 8\,e \overset{!}{\leq} 10^{-2} \to h_S \leq 1.07..$$

Und somit

$$n_S = 2 \quad \text{und} \quad h_S = 1.$$

Die Auswertung ergibt:

$$I_S = \frac{1}{6}(1 + 4\cdot 1.615146296 + 2\cdot 2.319776825 + 4\cdot 2.711481018 + 2.482577728) = 4.238106773$$