Aufgabe 1 (11 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 3.01 \\ 3.0 & 1.0 & 6.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie L und R explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung.

c) Berechnen Sie die Kondition κ von A bzgl. der 1-Norm.
(**Hinweis:** Es gilt $\|A^{-1}\|_1 \approx 10.204$.)

d) Mit welchem Fehler in x (relativ und absolut) muss man rechnen, wenn man statt mit A mit der Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & 3.0 \\ 3.0 & 1.0 & 6.0 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

rechnet?

Teil a)

Pivotzeile 2: Pivotvektor $\to (2,1,3)^T$ und $L_{21} = 2/3$ sowie $L_{31} = 1/3$:

$$A \to R_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1/3 & -0.99 \\ 0 & 2/3 & -1 \end{pmatrix}$$

Pivotzeile 3: Pivotvektor $\to p = (2,3,1)^T$ (d.h.: L_{21} und L_{31} vertauschen!) und $L_{32} = 1/2$:

$$R_1 \to R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & -0.49 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Teil b)

Vertausche b gemäß p

$$b \to \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vorwärtseinsetzen

$$\to y = \begin{pmatrix} 7 \\ 5/3 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen

$$\to x = \begin{pmatrix} -16.3571 \\ 13.2143 \\ 7.14286 \end{pmatrix}$$

Teil c)

$\|A\|_1 = \max\{6,\ 3,\ 10.01\} = 10.01 \to \kappa_1(A) = 10.01 \cdot 10.204 = 102.14$

Teil d)

$r_x \leq \dfrac{\kappa(A) r_A}{1 - \kappa(A) r_A} = 0.11364$ ($r_A = 0.000999$) und somit ($\|x\|_1 = 36.714$) $\|\Delta x\|_1 \leq 4.1721$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben sind die vier Meßwerte

t_i	0	1/2	1	3/2
y_i	2.1	-1.1	-1.8	0.9

,

die der Theorie nach zu einer Funktion der Form

$$y(t) = \alpha\, \cos(\pi\, t) + \beta\, \sin(\pi\, t)$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|A\,x - b\|_2 \to \min$ auf. Geben Sie A und b explizit an.

b) Bestimmen Sie die zugehörigen Normalgleichungen.

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem aus a) mittels Givensrotationen. Geben Sie die Lösung $y(t)$ sowie das Residuum explizit an.

Zu a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2.1 \\ -1.1 \\ -1.8 \\ 0.9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Zu b)

Normalgleichungen

$$(A^T A | A^T b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 3.9 \\ 0 & 2 & | & -2 \end{pmatrix}$$

Zu c)

Eliminiere $a_{31}:\ r = \sqrt{2} \to c = 1/\sqrt{2}\,,\ s = -1/\sqrt{2}$

$$\to \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & | & 1.95\sqrt{2} = 2.757716446 \\ 0 & 1 & | & -1.1 \\ 0 & 0 & | & 0.15\sqrt{2} = 0.2121320343 \\ 0 & -1 & | & 0.9 \end{pmatrix}$$

Eliminiere $a_{42}:\ r = \sqrt{2} \to c = 1/\sqrt{2}\,,\ s = -1/\sqrt{2}$

$$\to \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & | & 1.95\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & | & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & | & 0.15\sqrt{2} \\ 0 & 0 & | & -0.1\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen liefert

$$x = \begin{pmatrix} 1.95 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also: $y(t) = 1.95\, \cos(\pi\, t) - \sin(\pi\, t)$.

Das Residuum ist ≈ 0.255.

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Lösen Sie approximativ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^y + \sin x &= 1 + \sin(2) \\ 2\,x^2 + \frac{y^2}{2} &= 6 \end{aligned}$$

mittels zweier Iterationen sowohl des Newton-Verfahrens als auch des vereinfachten Newton-Verfahrens für Systeme. Benutzen Sie als Startwert jeweils

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x) + e^y - 1 - \sin(2) \\ 2 \cdot x^2 + 1/2 \cdot y^2 - 6 \end{pmatrix} \to f'(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) & e^y \\ 4 \cdot x & y \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0.416147 & 1 & | & 0 \\ 8 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \Delta x_0 = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.104037 \end{pmatrix} \to x_1 = \begin{pmatrix} 1.75 \\ -0.104037 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1.75 \\ -0.104037 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0.178246 & 0.901192 & | & 0.0241193 \\ 7 & -0.104037 & | & -0.130412 \end{pmatrix}$$

$$\left(\to \begin{pmatrix} -0.178246 & 0.901192 & | & 0.0241193 \\ 0 & 35.2872 & | & 0.816789 \end{pmatrix} \right)$$

$$\to \begin{pmatrix} 7 & -0.104037 & | & -0.130412 \\ 0 & 0.898543 & | & 0.0207985 \end{pmatrix} \to \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -0.0182862 \\ 0.0231469 \end{pmatrix} \to x_2 = \begin{pmatrix} 1.73171 \\ -0.0808898 \end{pmatrix}$$

Vereinfachtes Newton-Verfahren:
Erster Schritt und $f(x_1)$ wie Newton:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1.75 \\ -0.104037 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0.416147 & 1 & | & 0.0241193 \\ 8 & 0 & | & -0.130412 \end{pmatrix}$$

$$\to \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -0.0163015 \\ 0.0173355 \end{pmatrix} \to x_2 = \begin{pmatrix} 1.73370 \\ -0.0867013 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Funktion (das Integral)

$$F(x) = \int_0^x \ln(\cos t)\, dt$$

ist als Tabelle gegeben.

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$F(x)$	-0.001339	-0.01084	-0.03739	-0.09158	-0.1875	-0.3473	-0.6159

a) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(1.1)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung von drei Tabellenwerten und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

b) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(0.9)$ durch eine Newton-Interpolation vom Grad 3. Werten Sie das Polynom hornerartig aus. Geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

Hinweis: $F(x)$ ist die Stammfunktion von $\ln(\cos x)$.

$$F'(x) = \ln(\cos x) \to F''(x) = -\tan x \to F^{(3)}(x) = -\left(1+\tan^2 x\right) \to F^{(4)}(x) = -2\tan x \left(1+\tan^2 x\right).$$

Alle Ableitungen sind auf $[0, 1.4]$ monoton fallend und negativ. Also liegt das jeweils gesuchte Maximum des Betrages der Ableitung am rechten Rand.

Teil a) Die Benutzung von 3 Tabellenwerten entspricht der Interpolation mit einem quadratischen Polynom p_2. Die diesbezügliche Fehlerabschätzung lautet

$$|F(\bar{x}) - p_2(\bar{x})| \leq \frac{1}{3!} \max_{z\in[x_0,x_2]} |F'''(z)| \cdot |(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)(\bar{x}-x_2)|.$$

Da $\bar{x} = 1.1$ gilt, wird der das Knotenpolynom betreffende Anteil durch die Stützstellenwahl $(0.8, 1.0, 1.2)$ (wegen der Ableitung besser) und $(1.0, 1.2, 1.4)$ minimiert.

Tableau für beide Berechnungen:

x_i	$P_{i,0}$		$P_{i,1}$		$P_{i,2}$
0.8	-0.09158				
		$\searrow$			
1.0	-0.1875	$\rightarrow$	-0.23546		
		$\searrow$		$\searrow$	
1.2	-0.3473	$\rightarrow$	-0.2674	$\rightarrow$	-0.259415
		$\searrow$		$\searrow$	
1.4	-0.6159	$\rightarrow$	-0.213	$\rightarrow$	-0.2538

Damit erhalten wir die Näherung $F(1.1) \approx p_2(1.1) = P_{2,2} = -0.259415(-0.2538)$. Für die Fehlerabschätzung gilt:

$$|F(1.1) - p_2(1.1)| \leq \frac{1}{6} 7.616 \cdot 0.3 \cdot 0.1^2 \approx 3.8 \cdot 10^{-3} \left(|F(1.1) - p_2(1.1)| \leq \frac{1}{6} 34.62 \cdot 0.3 \cdot 0.1^2 \approx 17.3 \cdot 10^{-3}\right)$$

Teil b) Knotenwahl minimiert den Anteil des Knotenpolynoms für.

0.6	-0.03739						
		>	-0.27095				
0.8	-0.09158			>	-0.521625		
		>	-0.4796			>	-0.461458
1.0	-0.1875			>	-0.7985		
		>	-0.799				
1.2	-0.3473						

.

Die Newton–Darstellung des Interpolationspolynoms lautet in der hornerartigen Form

$$p_3(x) = -0.03739 + (x - 0.6) \cdot \{-0.27095 + (x - 0.8) \cdot [-0.521625 + (x - 1.0) \cdot (-0.461458)]\}.$$

Ausgewertet an der Stelle $\bar{x} = 0.9$ ergibt sich der auf 5 Stellen gerundete Wert $p_3(0.9) = -0.13294$.

Für die Fehlerabschätzung benötigen wir noch die 4. Ableitung (s.o.):

$$|f(0.9) - p_3(0.9)| \leq \frac{1}{24} \cdot 39.18 \cdot 0.1^2 \cdot 0.3^2 \approx 1.5 \cdot 10^{-3}.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Für das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} e^{\cos x} dx$$

sollen numerisch Näherungen bestimmt werden.

a) Wieviel Schritte (n) braucht man mit der

   1. summierten Mittelpunktregel,
   2. summierten Trapezregel,

   um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-4}$ zu erreichen? Schätzen Sie dazu die entsprechende Ableitung ab, ohne Extrema zu benutzen.

b) Bestimmen Sie mittels der summierten Simpsonregel eine Näherung für I mit einer garantierten Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-2}$.
   Hinweis: Für $f(x) = e^{\cos x}$ gilt $\max_{\xi \in \mathbb{R}} |f^{(4)}(\xi)| = 4 \cdot e$

---

zu a)

$$f(x) = e^{\cos x} \to f'(x) = -\sin(x) e^{\cos x} \to f''(x) = (\sin^2 x - \cos x) e^{\cos x}$$
$$\to |f''(x)| \leq 2\,e \qquad \Big(\text{besser: } (\sin^2(1) + 1 < 1.71)\, e\Big)$$

Für den Fehler der summierten Mittelpunktsregel (auf $[-1, 1]$) gilt:

$$f_M \leq \frac{1}{24} h_M^2 (1 - (-1)) \max_{x \in [-1,1]} |f''(x)| \leq \frac{1}{24} h_M^2 4\,e \overset{!}{\leq} 10^{-4} \to h_M \leq 0.0148569$$

Und somit

$$n_M \geq \frac{1 - (-1)}{0.0148569} = 134.6.. \to n_M = 135$$

Für den Fehler der summierten Trapezpunktsregel (auf $[-1, 1]$) gilt:

$$f_T \leq \frac{1}{12} h_T^2 (1 - (-1)) \max_{x \in [-1,1]} |f''(x)| \leq \frac{1}{12} h_T^2 4\,e \overset{!}{\leq} 10^{-4} \to h_T \leq 0.0105054$$

Und somit

$$n_T \geq \frac{1 - (-1)}{0.0105054} = 190.3.. \to n_T = 191$$

zu b)

Für den Fehler der summierten Simpsonregel (auf $[-1, 1]$) gilt:

$$f_S \leq \frac{1}{2880} h_S^4 (1 - (-1)) \max_{x \in [-1,1]} |f^{(4)}(x)| \leq \frac{1}{2880} h_S^4 8\,e \overset{!}{\leq} 10^{-2} \to h_S \leq 1.07..$$

Und somit

$$n_S = 2 \text{ und } h_S = 1$$

$$\begin{aligned} I_S &= \tfrac{1}{6}(1.7165257 + 4 \cdot 2.405078545 + 2 \cdot e + 4 \cdot 2.405078545 + 1.7165257) \\ &= \tfrac{1}{3}(1.7165257 + 4 \cdot 2.405078545 + e) \\ &= 4.68504057 \approx 4.685 \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Gegeben sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y''(t) + ty'(t) = 0$$

mit Anfangswerten $y(1) = 1$ und $y'(1) = 0$.

a) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf ein System erster Ordnung. Geben Sie auch die transformierten Anfangswerte an.

b) Berechnen Sie mit dem impliziten Euler–Verfahren mittels zweier Schritte eine Näherung für $y(5)$.

c) Geben Sie eine Näherung für $y''(5)$ an.

Transformation:

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} z \quad \text{und} \quad z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Impliziter Euler:

$$z_{i+1} = z_i + h \cdot f(t_{i+1}, z_{i+1})$$

Startwerte: $t_0 = 1$, $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit $(n = 2)$ $t_2 = 5$ folgt $h = 2$.

Da die Dgl. linear in z ist $(z'(t) = A(t) \cdot z(t))$, können wir ein lineares Gleichungssystem für z_{i+1} aufstellen

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= z_i + h(A(t_{i+1})z_{i+1}) \\ (E - h \cdot A(t_{i+1})) \cdot z_{i+1} &= z_i \\ a(h, t_{i+1}) \cdot z_{i+1} &= z_i \end{aligned}$$

Hier ist

$$a(h, t_{i+1}) = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 + h\, t_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 + 2\, t_{i+1} \end{pmatrix}$$

i	t_{i+1}	$a(h, t_{i+1})$	y_{i+1}
0	3.0000	$\begin{pmatrix} 1.0000 & -2.0000 \\ 0.0000 & 7.0000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.0000 \end{pmatrix}$
1	5.0000	$\begin{pmatrix} 1.0000 & -2.0000 \\ 0.0000 & 11.0000 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.0000 \end{pmatrix}$

Diese Gleichungssysteme sind also ganz besonders einfach zu lösen!

Es ist dann

$$y(5) \approx 1 \quad \text{und} \quad y'(5) \approx 0.$$

Hieraus folgt

$$y''(5) = -5\, y'(5) \approx -5 \cdot 0 = 0.$$

Bemerkung: Die exakte Lösung der DGL (für diese Anfangswerte!) ist $y(t) \equiv 1$.