Diplom – VP **Numerik** 22. März 2004

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei der Ausdruck $f(x,y) = \sqrt{x+y} - \sqrt{x}, \qquad x > 0,\ y > -x.$

a) Berechnen Sie die Kondition von f und betrachten Sie dabei insbesondere die Fälle

(i) $y = \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$ (d. h. $y \approx 0$),

(ii) $y = -(x-\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ (d. h. $y \approx -x$).

b) Schätzen Sie den relativen Fehler von f in 1. Ordnung ab für $(x,y) = (10, -9.9999)$. x und y seien jeweils mit einem relativen Fehler von $0.5 \cdot 10^{-4}$ behaftet. Auf wieviel Stellen ist dann f genau?

c) Berechnen Sie $f(3, 10^{-3})$ in 4–stelliger und 6–stelliger Gleitpunktarithmethik mit folgendem Algorithmus:

$$f_1 := x + y, \qquad f_2 := \sqrt{f_1}, \qquad f_3 := \sqrt{x}, \qquad f_4 := f_2 - f_3.$$

Interpretieren Sie das Ergebnis und geben Sie gegebenenfalls einen verbesserten Algorithmus an.

Teil a)

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{x+y}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} & \rightarrow \quad \varphi_x(x,y) &= -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+y}} \\ f_y(x,y) &= \frac{1}{2\sqrt{x+y}} & \rightarrow \quad \varphi_y(x,y) &= \frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x+y}} = \frac{1}{2} - \varphi_x(x,y) \end{aligned}$$

$$\kappa_{rel}(x,y) = \max\{|\varphi_x(x,y)|, |\varphi_y(x,y)|\}$$

(i) Für $y \approx 0$ (und $|x|$ nicht zu klein) ist $\kappa_{rel}(x,y) \approx 1$, das Problem also gut konditioniert.

(ii) Für $y \approx -x$ ist κ_{rel} in jedem Fall groß, das Problem also schlecht konditioniert.

Teil b)

$$\begin{aligned} \varphi_x(10, -9.9999) &= -158.113883 \\ \varphi_y(10, -9.9999) &= 158.613883 \end{aligned},$$

also: $\kappa_{rel}(10, -9.9999) = 158.614$ und somit:

$$r_f \dot{\leq} 158.614 \cdot 2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} = 0.0158614 \approx 1.6\%$$

Also ist $f(10, -9.9999)$ auf ca. 2 Stellen genau.

Bem: Die Schätzung ist nicht zu pessimistisch, denn:
$f(10, -9.9999) = -3.1523$ und $f(10.0005, -9.999400005) = -3.1292$

Teil c)

			4-stellig	6-stellig
f_1	$=$	$x+y$	3.001	3.00100
f_2	$=$	$\sqrt{f_1}$	1.732	1.73234
f_3	$=$	$\sqrt{x}$	1.732	1.73205
f_4	$=$	$f_2 - f_3$	0.000	0.00029

Das Ergebnis ist also trotz guter Kondition schlecht. Grund hierfür ist der **instabile** Algorithmus (für diese Werte) – Auslöschung bei f_4. Besser:

$$f(x,y) = \sqrt{x+y} - \sqrt{x} = \frac{y}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x}}$$

(Hiermit ergibt sich bereits bei 4-stelliger Rechnung der Wert 0.0002887. Zum Vergleich der exakte Wert: 0.000288651...)

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.867 & 0.635 \\ 0.618 & 0.473 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.345 \\ 0.678 \end{pmatrix}.$$

a) Alle Werte in A und b sind auf drei Stellen genau gerundet. Mit welchem relativen und welchem absoluten Fehler (gemessen in der ∞-Norm) mu"s man f"ur x rechnen?

b) Nun sei b exakt. Wie groß darf der relative Fehler in A höchstens sein, damit der relative Fehler in x kleiner als 20% ist?

$$r_x \le \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) r_A} (r_A + r_b) \quad \text{— falls} \quad \kappa(A)\, r_A < 1$$

Zu a)

$\det(A) = 0.017661$ und somit

$$A^{-1} = 56.622 \begin{pmatrix} 0.473 & -0.635 \\ -0.618 & 0.867 \end{pmatrix}$$

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 1.502 \cdot (56.622 \ \cdot 1.485) = 126.29$$

$$\|\Delta A\|_\infty = 2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} = 10^{-3} \to r_A = 0.00066578 \to \kappa_\infty(A) r_A = 0.084084 < 1$$

$$\|\Delta b\|_\infty = 0.5 \cdot 10^{-3} \ \text{ und } \ \|b\|_\infty = 0.678 \to r_b = 0.00073746$$

Insgesamt

$$r_x \le \frac{126.29}{1 - 0.084084} (0.00066578 + 0.00073746) = 0.19349 \qquad (\approx 19\%).$$

Für den absoluten Fehler müssen wir das Gleichungssystem lösen. Gauß – oder, da wir A^{-1} kennen, ausnahmsweise

$$x = A^{-1} b = \begin{pmatrix} -15.138 \\ 21.211 \end{pmatrix} \to \|\Delta x\|_\infty = 4.1042$$

zu b)

In obiger Fehlerformel ist nun $r_b = 0$. Ferner soll gelten:

$$r_x \le \frac{\kappa(A) r_A}{1 - \kappa(A) r_A} \overset{!}{\le} 0.2 \Leftrightarrow 1.2 \cdot \kappa(A) r_A \le 0.2 \Leftrightarrow r_A \le \frac{0.2}{1.2 \cdot \kappa(A)} = 0.0013197 \approx 0.13\%$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Meßwerte f_i

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 0.8 & -0.8 & -1 \end{array}\ .$$

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, daß diese Meßdaten einer Funktion

$$f(t) = \frac{1}{(t-a)^2} + b$$

genügen. Bestimmen Sie die Parameter a und b optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem, und führen Sie ausgehend vom Startwert $(a_0, b_0) = (0.3, -1)$ einen Gauß–Newton–Schritt durch. Berechnen Sie anschließend das Residuum.

Hinweis: Lösen Sie das auftretende lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen.

Die i-te Zeile des (überbestimmten) Gleichungssystems lautet

$$r_i := f(t_i) - f_i = \frac{1}{(t_i-a)^2} + b - f_i \stackrel{!}{=} 0.$$

Somit ist die i-te Zeile der Jakobischen J gegeben durch (das ist der Gradient)

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{(t_i-a)^3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir nun die Startwerte $(a_0, b_0) = (0.3, -1)$ in die Zeilen $(i = 1, 2, 3)$ ein, so erhalten wir :

$$(J| - r) = \begin{pmatrix} 5.83090 & 1 & | & -0.24082 \\ 0.40708 & 1 & | & -0.14602 \\ 0.10161 & 1 & | & -0.13717 \end{pmatrix} \rightarrow (J^T J| - J^T r) = \begin{pmatrix} 34.175 & 6.33956 & | & -1.4776 \\ 6.3396 & 3 & | & -0.52401 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 34.175 & 6.3396 & | & -1.4776 \\ 0 & 1.8240 & | & -0.24992 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta_0 = \begin{pmatrix} -0.017819 \\ -0.13702 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \Delta_0 = \begin{pmatrix} 0.28218 \\ -1.1370 \end{pmatrix}$$

Das Residuum ist $\|r\|_2 = \sqrt{0.003743^2 + 0.001861^2 + (-0.001638)^2} = 0.004485.$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x^2 + 6\,y^2 &= 16 \\ x\,y + x &= 2 \end{aligned}$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage der Lösungen verdeutlicht. Bestimmen Sie für den 1. Quadranten einen *guten* ganzzahligen Bereich $[x_u, x_o] \times [y_u, y_o]$, in dem eine Lösung liegt.

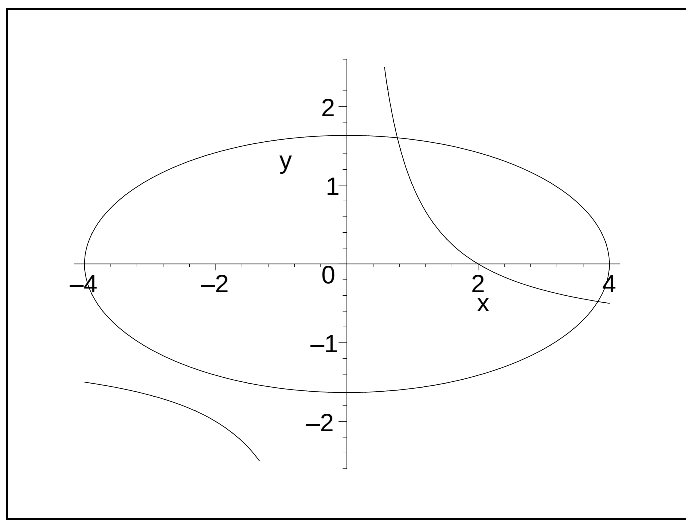
b) Geben Sie für die Lösung im ersten Quadranten eine geeignete 2d-Fixpunktgleichung an, und weisen Sie hierfür die Voraussetzungen des Fixpunksatzes von Banach nach. Begründen Sie Ihre Aussagen und schauen Sie schon mal auf c).

c) Wieviele Schritte sind ausgehend von dem Startwert $(x_0, y_0) = 0.5(x_u + x_o, y_u + y_o)$ höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\varepsilon = 10^{-4}$ zu erzielen.

d) Geben Sie eine a–posteriori–Fehlerabschätzung für (x_3, y_3) an.

---

zu a) Skizze (Ellipse und etwa $y = -1 + 2/x$):



Fixpunkte ungefähr bei $(3.8, -0.5)$ und $(0.75, 1.5)$. Der geforderte ganzzahlige Bereich ist also $D = [0,1] \times [1,2]$. D ist konvex und abgeschlossen.

zu b)

Wir lösen die erste Gleichung nach y (wegen des Faktors 6) und die zweite Gleichung nach x auf:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{y+1} \\ \sqrt{\dfrac{16-x^2}{6}} \end{pmatrix} =: F(x,y) \to F'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-2}{(y+1)^2} \\ \dfrac{-x}{\sqrt{(96-6x^2)}} & 0 \end{pmatrix}$$

Abb. in sich: Die erste Komponente ist auf $y \in [1,2]$ und die zweite für $x \in [0,1]$ monoton fallend. Also: $f(D) = [2/3, 1] \times [\sqrt{10}/2, 2\sqrt{6}/3] = [0.\overline{6}, 1] \times [1.5811388, 1.6329932] \subset D$

kontraktiv: Da $(0.5, 1.5)$ als Startwert vorgegeben ist, muss dieser im zu untersuchenden Gebiet liegen. Wir können also für die Kontraktivität nur eine Einschränkung auf $D' = [0.5, 1] \times [1.5, 1.64]$ machen. Für die Norm von F' auf D' erhalten wir die maximalen Einträge

$$\begin{aligned} \frac{2}{(1.5+1)^2} &= 0.32 \ \text{ Nenner minimal} \quad \text{und} \\ \frac{1}{\sqrt{96-6}} &= 0.10541 \ \text{ Zähler maximal, Nenner minimal} \end{aligned}$$

Damit ist F auch kontraktiv (auf D') mit $\alpha = 0.32$. ($\alpha = 0.5$ für D.) Da dies sowohl für die 1- als auch für die ∞-Norm gilt, wählen wir die ∞-Norm.

zu c)

$$\varepsilon = 10^{-4} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (0.5, 1.5) \rightarrow \mathbf{x}_1 = (0.8, 1.62019)$$

$$n \geq \frac{\ln \dfrac{\varepsilon(1-\alpha)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_\infty}}{\ln \alpha} = 7.3... \quad (12.5... \quad \text{für} \quad \alpha = 0.5)$$

Also bringen 8 Schritte mit Sicherheit die geforderte Genauigkeit.

zu d)

$$\mathbf{x}_2 = (0.763305, 1.6) \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_3 = (0.7692308, 1.602985) \rightarrow \Delta\mathbf{x}_2 = (0.005926, 0.002985);$$

und somit:

$$\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_3\|_\infty \leq \frac{0.32}{1 - 0.32}\, 0.005926 = 0.002789$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Die Funktion (das Integral)

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+2}\,dt$$

ist als Tabelle gegeben.

x	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
$F(x)$	0	0.1237	0.2403	0.3448	0.4352	0.5118	0.5762	0.6301

a) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(0.6)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung von vier Tabellenwerten, und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

b) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(1.6)$ durch eine Newton-Interpolation vom Grad 2. Werten Sie das Polynom hornerartig aus. Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung an, d.h.: Bestimmen Sie die Extrema der entsprechenden Ableitung.

Hinweis: $F^{(4)}(x) = -24\dfrac{x\,(x^2-2)}{(x^2+2)^4}$

---

zu a)

Die Ableitung ist gegeben. Das Knotenpolynom wird bzgl. 0.6 durch die Wahl der Stützstellen $0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$ minimiert.

Aitken–Tableau:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x_i & P_{i,0} & & P_{i,1} & & P_{i,2} & & P_{i,3} \\ \hline
0.25 & 0.1237 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
0.50 & 0.2403 & \rightarrow & 0.28694 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
0.75 & 0.3448 & \rightarrow & 0.28210 & \rightarrow & 0.283552 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
1.00 & 0.4352 & \rightarrow & 0.29056 & \rightarrow & 0.283792 & \rightarrow & 0.283664
\end{array}$$

Zur Fehlerabschätzung (Alles für $x \in [0.25, 1]$):

Die einfache Abschätzung der Ableitung liefert (diese reichte hier aus, da nicht nach einer ***möglichst guten*** Fehlerabschätzung gefragt war):

$$|F^{(4)}(x)| \le 24 \cdot \frac{1\cdot(2-0.25^2)}{(0.25^2+2)^4} = 2.570$$

Besser, aber nicht unbedingt gefordert, ist die folgende Idee: Der Nenner von $F^{(4)}(x)$ läßt sich nach unten durch $(0.25^2+2)^4$ abschätzen. Für den Zähler bestimmen wir das Extremum.

$$(x\,(x^2-2))' = 3\,x^2 - 2 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2/3}$$

Das lokale Extremum liefert uns auch einen größeren Wert als die Randwerte (klar wegen der Nullstelle bei $x = 0$), nämlich

$$24 \cdot \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot(2-\frac{2}{3})}{(0.25^2+2)^4} = 1.444$$

Optimal ist

$$F^{(5)}(x) = \frac{120\cdot(x^4 - 4\cdot x^2 + \frac{4}{5})}{(x^2+2)^5} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{4-\frac{4}{5}}}$$

mit der für uns interessanten Nullstelle $x_E = 0.4595 \rightarrow F^{(4)}(x_E) = 0.8253$

Hiermit erhalten wir die Fehlerabschätzung:

$$|F(0.6) - p_3(0.6)| \le \frac{0.8253}{4!}\cdot 0.35\cdot 0.1\cdot 0.15\cdot 0.4 = 0.00007221 \approx 0.72\cdot 10^{-4}$$

(Bzw.: $0.0001263 \approx 1.3\cdot 10^{-4}/0.0002248 \approx 2.2\cdot 10^{-4}$ in den ersten Fällen)

zu b)

Das Knotenpolynom wird bzgl. 1.6 durch die Wahl der Stützstellen $1.25,\ 1.5,\ 1.75$ minimiert.

$$
\begin{array}{r|lllll}
1.25 & 0.5118 & & & & \\
 & & > & 0.2576 & & \\
1.50 & 0.5762 & & & > & \text{-0.084} \\
 & & > & 0.2156 & & \\
1.75 & 0\ .6301 & & & &
\end{array}
$$

Also (Horner):

$$p(x) = 0.5118 + (x - 1.25) \cdot (0.2576 + (x - 1.5) \cdot (-0.084))$$

Und damit $p(1.6) = 0.59902$

$$F''(x) = \frac{-2\,x}{(x^2+2)^2} \rightarrow F'''(x) = \frac{6\,x^2 - 4}{(x^2+2)^3}$$

Da die 4. Ableitung offensichtlich Nullstellen bei 0 und $\pm\sqrt{2}$ hat, hat F''' bei $\sqrt{2}$ ein lokales Extremum. Auch hier ist der Wert des lokalen Extremuns mit $1/8 = 0.125$ größer als die Randwerte. D.h.:

$$|F(1.6) - p_2(1.6)| \leq \frac{0.125}{6} \cdot 0.35 \cdot 0.1 \cdot 0.15 = 0.0001094$$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Eine erzwungene Schwingung (mit äußerer harmonischer Kraft) führt nach Einsetzen der physikalischen Größen auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$s''(t) = -0.5\, s'(t) - 5\, s(t) + 2\, \cos(\pi t)$$

mit Anfangswerten $s(0.5) = 0.5$ und $s'(0.5) = -1$.

a) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf ein System erster Ordnung. Geben Sie auch die transformierten Anfangswerte an.

b) Berechnen Sie mit dem verbesserten Euler–Verfahren mittels zweier Schritte eine Näherung für $s(1.5)$. Geben Sie diese und auch Näherungen für $s'(1.5)$ und $s''(1.5)$ explizit an.

---

zu a)

Transformation:

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -0.5 \end{pmatrix} \mathbf{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot \cos(\pi t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{z}_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Da wir hier ein explizites Verfahren verwenden, können wir auch (vielleicht sogar besser) die folgende Darstellung verwenden:

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} z_2 \\ -5\, z_1 - 0.5\, z_2 + 2 \cdot \cos(\pi t) \end{pmatrix} = f(t; \mathbf{z}) = f(t; z_1, z_2)$$

zu b)

Den verbesserten Euler schreiben wir folgendermaßen:

$$\begin{aligned} y_{i+\frac{1}{2}} &= y_i + \tfrac{h}{2} f(t_i, y_i) && (= y_i + \tfrac{h}{2} k_1) \\ y_{i+1} &= y_i + h f(t_i + \tfrac{h}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}) && (= y_i + h k_2) \end{aligned}$$

(Es handelt sich also im Prinzip um eine explizite Mittelpunktsregel.)

Da wir zwei Schritte (von $0.5 \to 1.5$) machen sollen, ergibt sich $h = 0.5$.

Erster Schritt:

$$k_1 = f\left(0.5, \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \cdot 0.5 - 0.5 \cdot (-1) + 2 \cdot \cos(0.5\,\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$y_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = f\left(0.75, \begin{pmatrix} 0.25 \\ -1.5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -5 \cdot 0.25 - 0.5 \cdot (-1.5) + 2 \cdot \cos(0.75\,\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1.9142 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1.9142 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.9571 \end{pmatrix}$$

Zweiter Schritt:

$$k_1 = f\left(1, \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.957106781 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1.9571 \\ -5\cdot) - 0.25) - 0.5 \cdot (-1.9571) + 2 \cdot \cos(1\,\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.9571 \\ 0.22855 \end{pmatrix}$$

$$y_{1+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.9571 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} -1.9571 \\ 0.22855 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.73928 \\ -1.9000 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = f\left(1.25, \begin{pmatrix} -0.73928 \\ -1.9000 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1.9000 \\ -5 \cdot (-0.73928) - 0.5 \cdot (-1.9000) + 2 \cdot \cos(1.25\,\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.9000 \\ 3.2322 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} -0.25 \\ -1.9571 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} -1.9000 \\ 3.2322 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.2000 \\ -0.34103 \end{pmatrix}$$

Also ist $y(1.5) \approx -1.2000$ und $y'(1.5) \approx -0.34103$.

Ferner erhalten wir $y''(1.5) \approx -0.5 \cdot (-0.34103) - 5 \cdot (-1.2000) + 2 \cdot \cos(1.5 \cdot \pi) = 6.1704$

Bem.: Mit den in der Höheren Mathematik erlernten Methoden kann man die Dgl. auch exakt lösen (Eigenwerte der Systemmatrix sind $-0.25 \pm 2.222048604 \cdot I$):

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{-0.25 \cdot t} \left(-0.08337073348 \cdot \sin(2.222048604 \cdot t) + 1.138747243 \cdot \cos(2.222048604 \cdot t)\right) + \\ &\quad 0.1199976654 \cdot \sin(\pi \cdot t) - 0.3720031361 \cdot \cos(\pi \cdot t) \end{aligned}$$