Diplom – VP **Numerik** 13. September 2004

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -40 \\ 80 & -10 & 10 \\ -10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Skalieren (Zeilenäquilibrierung) Sie A und bestimmen Sie die LR-Zerlegung der skalierten Matrix. Geben Sie L und R explizit an.

b) Berechnen Sie die Determinante von A. (Mit Zwischenergebnissen, sonst **0 Punkte**)

c) Das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit $b = (-50, 280, -30)^T$ soll mit der LR-Zerlegung aus a) gelöst werden. Transformieren Sie b so ($\rightarrow \tilde{b}$), dass man direkt mit dem Vorwärtseinsetzen ($L \cdot y = \tilde{b}$) beginnen kann. (D.h.: Nur $\tilde{b}$ angeben, Lösung des Gleichungssystems nicht gefordert!)

Teil a)

$$\left.\begin{array}{lcccccccc} s_1 & = & 10 & + & 0 & + & 40 & = & 50 \\ s_2 & = & 80 & + & 10 & + & 10 & = & 100 \\ s_3 & = & 10 & + & 5 & + & 5 & = & 20 \end{array}\right\} \rightarrow A_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & -0.8 \\ 0.8 & -0.1 & 0.1 \\ -0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

LR mit überschreiben in A_s

$$A_s \rightarrow \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & -0.8 \\ 4 & -0.1 & 3.3 \\ -2.5 & 0.25 & -1.75 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & -0.8 \\ 4 & -0.1 & 3.3 \\ -2.5 & -2.5 & 6.5 \end{pmatrix}$$

Also:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2.5 & -2.5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & -0.8 \\ 0 & -0.1 & 3.3 \\ 0 & 0 & 6.5 \end{pmatrix}$$

Teil b)

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{3} s_i \cdot R_{ii} \left(= \prod_{i=1}^{3} s_i \cdot \prod_{i=1}^{3} R_{ii} \right) = 100000 \cdot (-0.13) = -13000$$

Teil c)

Skalierung auf b anwenden:

$$b_i \rightarrow \tilde{b}_i = b_i / s_i \quad \text{ergibt} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2.8 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

Nachtrag: Mit Pivotisierung (Nicht verlangt!):

Pivotzeile 2 : Pivovektor $\rightarrow (2,1,3)^T$ $L_{2,1} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25$, $L_{3,1} = \frac{-0.5}{0.8} = -0.625$

$$A \rightarrow R_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.025 & -0.825 \\ 0 & 0.1875 & 0.3125 \end{pmatrix}$$

Pivotzeile 3 : Pivovektor $\rightarrow (2,3,1)^T$ $L_{3,2} = \frac{0.025}{0.1875} = 0.133333$

$$R_1 \rightarrow R_2 = R = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1875 & 0.3125 \\ 0 & 0 & -0.866667 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.625 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.133333 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bei zwei Zeilenvertauschungen *behält* die Determinante ihr Vorzeichen.

$$b = \begin{pmatrix} -50 \\ 280 \\ -30 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 2.8 \\ -1.5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2.8 \\ -1.5 \\ -1 \end{pmatrix} = \tilde{b}$$

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Eine approximative LR-Zerlegung folgender Matrix A sei bekannt:

$$A = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.25 & 0.2 \\ 0.25 & 0.2 & 0.17 \\ 0.2 & 0.17 & 0.12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.75 & 1 & 0 \\ 0.6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.33 & 0.25 & 0.2 \\ 0 & 0.01 & 0.02 \\ 0 & 0 & -0.04 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.25 & 0.2 \\ 0.2475 & 0.1975 & 0.17 \\ 0.198 & 0.17 & 0.12 \end{pmatrix}$$

a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = (1, 0.8, 0.6)^T$ mit obiger approximativer LR-Zerlegung.

b) Mit welchem relativen Fehler in x (bzgl. der 1-Norm) müssen Sie rechnen?
Hinweis: $\|A^{-1}\|_1 \approx 103.42$.

c) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = (2, 0, 2)^T$ einen Nachiterationsschritt aus. (Residuum mit Taschenrechnergenauigkeit, sonst mindestens 4-stellig.)

Teil a)

Vorwärtseinsetzen: $b \to y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.05 \\ -0.100 \end{pmatrix}$.

Rückwärtseinsetzen: $y \to \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1.5\overline{1} \\ 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}$.

Teil b)

$\Delta A = L \cdot R - A = (L \cdot R \text{ schon angegeben}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.0025 & -0.0025 & 0 \\ -0.002 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. b ist ungestört.

Die Fehlerabschätzung lautet (Alles in der 1-Norm, gilt aber auch für andere Normen):

$$r_x \leq \frac{\kappa(A)}{1 - r_A \cdot \kappa(A)} \cdot r_A$$

$$\begin{array}{rcl} \kappa(A) & = & ||A||_1 \cdot ||A^{-1}||_1 = (0.33 + 0.25 + 0.2) \cdot 103.42 = 0.78 \cdot 103.42 = 80.667 \\ ||\Delta A||_1 & = & 0.0025 + 0.002 = 0.0045 \\ r_A & = & \dfrac{0.0045}{0.78} = 0.0057692 \\ h & = & r_A \cdot \kappa(A) = 0.46539 < 1 \qquad \text{Voraussetzung für die Fehlerabschätzung} \\ \to & & \\ r_x & \leq & 0.87052 \end{array}$$

Der Fehler liegt also höchstens bei ca. 87%.

Teil c)

Residuum (Falls hier $b - A \cdot x_0$, dann unten $x_0 + \Delta x_0$):

$$r_0 = A \cdot x_0 - b = \begin{pmatrix} 0.06 \\ 0.04 \\ 0.04 \end{pmatrix}.$$

Vorwärtseinsetzen: $r_0 \to y = \begin{pmatrix} 0.06 \\ -0.005 \\ 0.014 \end{pmatrix}$.

Rückwärtseinsetzen: $y \to \Delta x_0 = (\, 0.24242, 0.2, -0.35 \,)$.

Und somit $x_1 = x_0 - \Delta x_0 = \begin{pmatrix} 1.7576 \\ -0.2 \\ 2.35 \end{pmatrix}$.

Zum verkleich die auf 5 Stellen exakte Lösung $\overline{x} = \begin{pmatrix} 1.7094 \\ -0.17094 \\ 2.3932 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Gegeben seien Meßwerte

t_i	0.1	0.3	0.5
f_i	0.5	−0.2	0.7

,

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = \cos(\omega t + \phi)$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$ explizit auf (Meßwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß–Newton–Verfahren seien die Startwerte $\omega_0 = 3$, $\phi_0 = 0.7$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? (Der erste Schritt muss nicht durchgeführt werden.)

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 \\ 0 & 1 \\ 0.6 & -0.8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen. Geben Sie das Residuum explizit an.

Teil a)

Die i-te Zeile der zu minimierenden Funktion $F(\omega, \phi)$ lautet:

$$F_i := f(t_i) - f_i = \cos(\omega t_i + \phi) - f_i (= r_i).$$

Somit haben wir $||F(x)||_2 \to \min$ mit

$$F(x) = F(\omega, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(0.1\omega + \phi) - 0.5 \\ \cos(0.3\omega + \phi) + 0.2 \\ \cos(0.5\omega + \phi) - 0.7 \end{pmatrix}$$

Teil b)

Die i-te Zeile von der Jakobimatrix J und rechten Seite $-r$ (Residuum):

$$(\; -t_i \cdot \sin(t_i \cdot \omega + \phi) \qquad - \sin(t_i \cdot \omega + \phi) \;\; | \;\; f_i - \cos(\omega t_i + \phi) \;)$$

Bem.: In der erstem Spalte steht hier also jeweils das t_i-fache der zweiten!

Nun setzen wir für ω $\omega_0 = 3$ und für ϕ $\phi_0 = 0.7$ ein:

$$(J| - r) = \begin{pmatrix} -0.0841471 & -0.841471 & | & -0.0403023 \\ -0.299872 & -0.999574 & | & -0.170800 \\ -0.404248 & -0.808496 & | & 1.28850 \end{pmatrix}$$

Das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt lautet also:

$$\left\| J \cdot \begin{pmatrix} \Delta\omega_0 \\ \Delta\phi_0 \end{pmatrix} - (-r) \right\|_2 \to \min$$

Teil c)

eliminiere a_{31} : $r = 1 \to s = 0.6 \to c = 0.8$

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & | & 1.5 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0.6 & -0.8 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1.2 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & | & -0.9 \\ 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

eliminiere a_{41} : $r = 1.41421 \to s = 0.707107 \to c = 0.707107$

$$\to \begin{pmatrix} 1.41421 & 0 & | & 1.55563 \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & | & -0.9 \\ 0 & 0 & | & -0.141421 \end{pmatrix}$$

eliminiere $a_{32}:\ r = 1.41421 \rightarrow s = -0.707107 \rightarrow c = 0.707107$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1.41421 & 0 & | & 1.55563 \\ 0 & 1.41421 & | & 1.3435 \\ 0 & 0 & | & 0.0707107 \\ 0 & 0 & | & -0.141421 \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen:

$$\rightarrow x = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.95 \end{pmatrix}$$

Residuum:

$$res = 0.15811$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x\,y + y &= 3.5 \\ 4\,x^2 + y^2 &= 16 \end{aligned}$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage der Lösungen verdeutlicht. Bestimmen Sie für den 1. Quadranten einen *guten* ganzzahligen Bereich $[x_u, x_o] \times [y_u, y_o]$, in dem eine Lösung liegt.

b) Geben Sie für die Lösung im ersten Quadranten eine geeignete 2D-Fixpunktgleichung an, und weisen Sie hierfür die Voraussetzungen des Fixpunksatzes von Banach nach. Begründen Sie Ihre Aussagen und schauen Sie schon mal auf c).

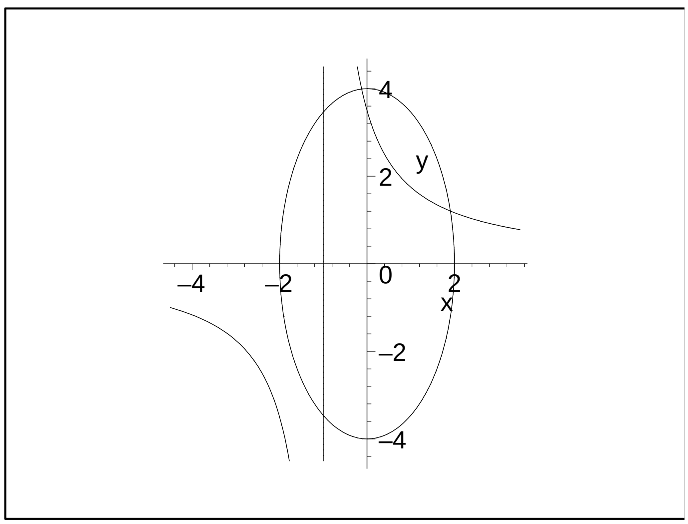
c) Wieviele Schritte sind ausgehend von dem Startwert $(x_0, y_0) = 0.5(x_u + x_o, y_u + y_o)$ höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$ zu erzielen.

d) Geben Sie eine a–posteriori–Fehlerabschätzung für (x_3, y_3) an.

---

zu a)

Skizze (Ellipse in Normallage mit Hauptachsen $a = 2$ und $b = 4$, $y(x) = \dfrac{3.5}{x+1}$ mit Polstelle ($x = -1$, Asymptote $y = 0$ sowie dem Funktionswert an der Stelle 0 (3.5)):



Da $y(-2) = -3.5$, liegt im dritten Quadranten kein Fixpunkt. Somit sind die Fixpunkte ungefähr bei $(-0.125, 4)$ und $(1.2, 1.9)$. Der geforderte ganzzahlige Bereich ist ($y(2) = 3.5/3 > 1$) also $D = [1,2] \times [1,2]$. D ist **konvex** und abgeschlossen.

zu b)

Wir lösen die erste Gleichung nach $y = y(x)$ (|Steigung im Fixpunkt| < 1, das ist $y_x(x)$ und $y_y(x) = 0$) und die zweite Gleichung nach x auf (wegen des Faktors 4):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{16-y^2}}{2} \\ \dfrac{3.5}{x+1} \end{pmatrix} =: F(x,y) \to F'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-y}{2\sqrt{16-y^2}} \\ \dfrac{-3.5}{(x+1)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

Abb. in sich: Die erste Komponente ist für $y \in [1,2]$ und die zweite für $x \in [1,2]$ (streng) monoton fallend. Also: $f(D) = [\sqrt{3}, \sqrt{15}/2] \times [7/6, 7/4] = [1.73205, 1.93649] \times [1.1\overline{6}, 1.75] \subset D$

kontraktiv: Da $(1.5, 1.5)$ als Startwert vorgegeben ist, sollte dieser im zu untersuchenden Gebiet liegen. Wir können also für die Kontraktivität nur eine Einschränkung auf etwa $D' = [1.5, 1.94] \times [1.16, 1.75]$ machen. Dieses Gebiet ist ebenfalls konvex und wir dürfen die Kontaktivität mit F' zeigen. Für die Norm von F' auf D' erhalten wir die maximalen Einträge

$$\begin{aligned}
\frac{1.75}{2\sqrt{16-1.75^2}} &= 0.2432668164 \;\; \text{Zähler maximal, Nenner minimal und} \\
\frac{3.5}{(1.5+1)^2} &= 0.56 \;\; \text{Nenner minimal}
\end{aligned}$$

Damit ist F auch kontraktiv (auf D') mit $\alpha = 0.56$. ($\alpha = 0.875$ für D.) Da dies sowohl für die 1- als auch für die ∞-Norm gilt, wählen wir die ∞-Norm.

zu c)

$$\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-5} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (1.5, 1.5) \rightarrow \mathbf{x}_1 = (1.854049622, 1.4)$$

$$n \geq \frac{\ln \dfrac{\varepsilon(1-\alpha)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_\infty}}{\ln \alpha} = 20.6... \quad (99.2... \;\; \text{für} \;\; \alpha = 0.875)$$

Also bringen 21 Schritte mit Sicherheit die geforderte Genauigkeit.

zu d)

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_2 &= (1.873499400, 1.226327662) \text{ und} \\
\mathbf{x}_3 &= (1.903688555, 1.218027051) \rightarrow \\
\Delta\mathbf{x}_2 &= (0.030189155, -0.008300611)
\end{aligned}$$

und somit:

$$\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_3\|_\infty \leq \frac{0.56}{1-0.56} 0.030189155 = 0.03842256092 \leq 0.04$$

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Die Funktion $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ soll interpoliert werden. Gegeben ist folgende Tabelle:

x	0.20	0.60	1.00	1.40	1.80	2.20
$f(x)$	0.20134	0.63665	1.17520	1.90430	2.94217	4.45711

a) Gesucht ist ein Näherungswert für $f(1.2)$ mit dem Neville–Aitken–Schema unter Benutzung aller Tabellenwerte. Berechnen Sie dazu die im folgenden Tableau fehlenden Werte $P_{i,k}$. (unterhalb der Aufgabenstellung)

$$\begin{array}{l|ccccccccccc}
x_0 = 0.20 & 0.20134 & & & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & & & \\
x_1 = 0.60 & 0.63665 & \rightarrow & 1.28963 & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & & & \\
x_2 = 1.00 & 1.17520 & \rightarrow & 1.44448 & \rightarrow & P_{2,2} & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_3 = 1.40 & 1.90430 & \rightarrow & P_{3,1} & \rightarrow & 1.51593 & \rightarrow & 1.51047 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_4 = 1.80 & P_{4,0} & \rightarrow & 1.38537 & \rightarrow & 1.50115 & \rightarrow & 1.50854 & \rightarrow & 1.50927 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_5 = 2.20 & 4.45711 & \rightarrow & 0.66978 & \rightarrow & 1.56426 & \rightarrow & P_{5,3} & \rightarrow & 1.50972 & \rightarrow & P_{5,5}
\end{array}$$

Welchen Grades ist das Polynom, das dem Wert von $P_{5,3}$ zu Grunde liegt?

b) Bestimmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.1)$ durch eine Newton–Interpolation vom Grad 3. Werten Sie dazu das Polynom **hornerartig** aus.

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie (f ist ungerade), **nicht** aber die Beziehung $f(0) = 0$ aus!

c) Geben Sie eine Fehlerabschätzung für das in b) berechnete Interpolationspolynom für das Intervall $[-0.2, 0.2]$ an.

Hinweis: Führen Sie eine Extremwertbestimmung des Knotenpolynoms $\omega(x) = \prod(x - x_i)$ durch!

Teil a)

Das Neville–Aitken-Schema ist rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned}
P_{i,0} &= f(x_i), \qquad 0 \le i \le n, \\
P_{i,k} &= P_{i-1,k-1} + \frac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}}(x - x_{i-k}), \qquad 0 \le k \le i \le n.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die geforderten Werte mit $x = 1.2$ (nochmal alle Werte, die zu bestimmenden sind **fett** gedruckt)

$$\begin{array}{l|ccccccccccc}
x_0 = 0.20 & 0.20134 & & & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & & & \\
x_1 = 0.60 & 0.63665 & \rightarrow & 1.28963 & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & & & \\
x_2 = 1.00 & 1.17520 & \rightarrow & 1.44448 & \rightarrow & \mathbf{1.48319} & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_3 = 1.40 & 1.90430 & \rightarrow & \mathbf{1.53975} & \rightarrow & 1.51593 & \rightarrow & 1.51047 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_4 = 1.80 & \mathbf{2.94217} & \rightarrow & 1.38537 & \rightarrow & 1.50115 & \rightarrow & 1.50854 & \rightarrow & 1.50927 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_5 = 2.20 & 4.45711 & \rightarrow & 0.66978 & \rightarrow & 1.56426 & \rightarrow & \mathbf{1.51167} & \rightarrow & 1.50972 & \rightarrow & \mathbf{1.50949}
\end{array}$$

Die Werte $P_{i,k}$ beruhen auf Polynomen k–ten Grades, somit hat das dem Wert $P_{5,3}$ zu Grunde liegende Polynom den Grad 3.

Teil b)
Die Funktion $f(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung (ungerade, also $f(-x) = -f(x)$. Wir wählen die Stützstellen so, dass das der Betrag des Knotenpolynoms in der Fehlerformel minimal wird. (Im folgenden Tableau ist mit 10-stelliger Genauigkeit gerechnet worden, und die Zwischenergebnisse sind auf 6 Stellen gerundet angegeben.)

$$\begin{array}{c|ccccccc}
-0.6 & -0.63665 & & & & \\
 & & > 1.08828 & & & \\
-0.2 & -0.20134 & & > -0.101969 & & \\
 & & > 1.0067 & & > 0.169948 \\
0.2 & 0.20134 & & > 0.101969 & & \\
 & & > 1.08828 & & & \\
0.6 & 0.63665 & & & &
\end{array}$$

Dazu gehört das Polynom

$$p_3(x) = ((0.169948 \cdot (x - 0.2) - 0.101969) \cdot (x + 0.2) + 1.08828) \cdot (x + 0.6) - 0.63665$$

$$p_3(0.1) = 0.100160$$

Teil c)
Für $x \in [-0.2, 0.2]$ haben wir die Fehlerformel

$$\max_{x\in[-0.2,0.2]} |f(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \max_{z\in[-0.6,0.6]} |f^{(4)}(z)| \max_{x\in[-0.2,0.2]} |\omega_4(x)|$$

mit dem Knotenpolynom

$$\omega_4(x) := \prod_{i=0}^{3}(x - x_i) = (x + 0.6)\,(x + 0.2)\,(x - 0.2)\,(x - 0.6) = (x^2 - 0.36)\,(x^2 - 0.04).$$

Dieses hat die Ableitung

$$\omega_4'(x) = 4\,x\,(x^2 - 0.2) = 4\,x\,(x - \sqrt{0.2})\,(x + \sqrt{0.2}),$$

also die Extremalstellen 0 sowie $\pm\sqrt{0.2} = \pm 0.4472$. Lediglich die erste liegt im Intervall $[-0.2, 0.2]$, und wegen $\omega_4(\pm 0.2) = 0$ gilt somit

$$\max_{x\in[-0.2,0.2]} |\omega_4(x)| = \omega_4(0) = 0.0144.$$

Weiterhin gilt

$$f(x) = \sinh(x) \rightarrow \quad f^{(4)}(x) = \sinh(x).$$

Da die vierte Ableitung monoton steigend ist, gilt

$$\max_{z\in[-0.6,0.6]} |f^{(4)}(z)| = f^{(4)}(0.6) = 0.63665,$$

und damit insgesamt

$$\max_{x\in[-0.2,0.2]} |f(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{24} \cdot 0.65665 \cdot 0.0144 = 0.38199 \cdot 10^{-3}.$$

Damit liefert P_3 in diesem Intervall auf 3 Stellen genaue Ergebnisse.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Das Integral

$$I = \int_{-2}^{2} \cos(x^2)\, dx$$

soll mit der summierten Trapezregel $T(h)$ und anschließender Romberg–Extrapolation zur Schrittweitenfolge $h_i := 4 \cdot 2^{-i},\ i = 0, 1, \ldots, 4$ approximiert werden.

a) Bestimmen Sie die Werte, die im folgenden Extrapolationsschema fehlen. (unterhalb der Aufgabenstellung)

$$\begin{array}{lllllllll}
T(h_0) = T_{00} = \text{-2.614574} & & & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & & & \\
T(h_1) = T_{10} = 0.692713 & \rightarrow & 1.795142 & & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & & & \\
T(h_2) = T_{20} = 1.426961 & \rightarrow & T_{21} & \rightarrow & 1.663482 & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
T(h_3) = T_{30} = \ldots & \rightarrow & 0.929972 & \rightarrow & 0.880523 & \rightarrow & 0.868095 & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
T(h_4) = T_{40} = 0.954807 & \rightarrow & 0.921669 & \rightarrow & T_{42} & \rightarrow & 0.921760 & \rightarrow & T_{44}
\end{array}$$

Welcher Wert approximiert I am besten?

b) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für $T(h_4)$ an.

c) Von welcher Ordnung ist (theoretisch) der Wert T_{32}?

d) Schätzen Sie den Fehler von T_{44}.

Teil a)

Zunächst berechnen wir den Wert $T(h_3) = T_{3,0}$. Alle Werte der 0-Spalte müssen mit der summierten Trapezregel berechnet werden. Allgemein ist diese für $h \cdot n = b - a$ gegeben durch

$$T(h) = h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\,h) + \frac{f(b)}{2}\right). \tag{1}$$

Für den Integranden $f(x) = \cos(x^2)$ haben wir Achsensymmetrie, also $f(-x) = f(x)$. Da die Integrationsgrenzen $b = 2 = -a$ ($\rightarrow h_0 = 4$ und $h_3 = 0.5$) symmetrisch zum Ursprung liegen, haben wir hier

$$\begin{aligned}
T(h_3) &= 2 \cdot 0.5\left(\tfrac{f(0)}{2} + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + \tfrac{f(2)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + 0.968912 + 0.540302 - 0.628174 + \frac{-0.653644}{2} = 1.05422
\end{aligned}$$

Noch einfacher wird es, wenn wir die Rekursionsformel für die Rombergfolge

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}T(h) + \frac{h}{2} \sum_{x_j \text{ ist neue Stützstelle}} f(x_j)$$

und die Symmetrie benutzen ($h = h_2$, $h_3 = 0.5$):

$$\begin{aligned}
T(h_3) &= 0.5 \cdot T(h_2) + h_3 \cdot (f - (1.5) + f(-0.5) + f(0.5) + f(1.5)) \quad \text{jetzt Symmetrie} \\
&= 0.5 \cdot 1.426961 + 1 \cdot (\cos 0.5^2 + \cos 1.5^2) = 1.05422
\end{aligned}$$

Allgemein lautet die Rekursionsformel des Romberg–Schemas

$$T_{i,j} = \frac{4^j\, T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}, \qquad i = j, j+1, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$
\begin{aligned}
T_{21} &= \frac{4\cdot T_{20}-T_{10}}{4-1} = \frac{4\cdot 1.42696-0.692713}{3} = 1.67171\\
T_{42} &= \frac{16\cdot T_{41}-T_{31}}{16-1} = \frac{16\cdot 0.921669-0.929972}{15} = 0.921116\\
T_{44} &= \frac{256\cdot T_{43}-T_{33}}{256-1} = \frac{256\cdot 0.92176-0.868095}{255} = 0.921971
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich das vollständige Tableau (zu berechnende Werte **fett** – das Tableau wurde mit höherer Genauigkeit berechnet):

$$
\begin{array}{lllllllll}
T(h_0) = T_{00} = -2.614574 & & & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & & & \\
T(h_1) = T_{10} = 0.692713 & \rightarrow & 1.795140 & & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & & & \\
T(h_2) = T_{20} = 1.426961 & \rightarrow & \mathbf{1.671710} & \rightarrow & 1.663480 & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
T(h_3) = T_{30} = \mathbf{1.054219} & \rightarrow & 0.929972 & \rightarrow & 0.880523 & \rightarrow & 0.868095 & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
T(h_4) = T_{40} = 0.954807 & \rightarrow & 0.921669 & \rightarrow & \mathbf{0.921115} & \rightarrow & 0.921760 & \rightarrow & \mathbf{0.921970}
\end{array}
$$

Theoretisch (höchste Approximationsordnung – $h^{2\cdot 4+2} = h^{10}$) ist T_{44} der beste Wert.

Teil b)

Die Fehlerabschätzung für die summierte Trapezregel lautet

$$|T(h) - I| \leq \frac{h^2}{12}(b-a) \max_{z\in[a,b]} |f''(z)|.$$

Für die Fehlerabschätzung brauchen wir die 2. Ableitung:

$$f(x) = \cos\left(x^2\right) \rightarrow f''(x) = -(4\,x^2\,\cos(x^2) + 2\,\sin(x^2))$$

Auf $[-2,2]$ gilt $|f''(x)| \leq 4\cdot 2^2\cdot 1 + 2\cdot 1 = 18$

Da $f''(\sqrt{\pi}) = 4\cdot\pi \approx 12.57$ und der Extremalwert ja sogar noch größer ist, handelt es sich hier also schon um eine recht gute Abschätzung.

Bem.: f'' ist nicht monoton: $f''(1.882) = 13.8269 > 11.9719 = f''(2)$, d.h. Randwertuntersuchung reicht nicht!!

Insgesamt haben wir für den Fehler

$$|T(h_4) - I| \leq \frac{0.25^2}{12}\cdot 4\cdot 18 = 0.0625\cdot 6 = 0.375$$

Teil c)

T_{32} ist theoretisch von der Ordnung $h^{2\cdot 2+2} = h^6$.

Teil d)

Der Fehler von T_{44} läßt sich schätzen zu

$$|T_{44} - I| \lessapprox |T_{44} - T_{43}| = |0.921970 - 0.921760| = 0.00021$$