Diplom – VP **Numerik** 21. März 2005

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie L und R explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung. **ACHTUNG:** Alle anderen Wege ergeben 0 Punkte!

c) Berechnen Sie die Kondition κ von A bzgl. der ∞-Norm. $\left(\textbf{Hinweis:} \text{ Es gilt } \|A^{-1}\|_\infty = \frac{5}{3}.\right)$

d) Mit welchem Fehler in $\tilde{x}$ (relativ und absolut) muss man rechnen, wenn man die obige Lösung für das Gleichungssystem $\tilde{A}\tilde{x} = b$ mit

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3.01 \\ 4 & 2 & 8.03 \\ 2 & 2 & 4.01 \end{pmatrix}$$

verwendet? Benutzen Sie eine entsprechende Fehlerformel!

Teil a)

Pivotzeile 2: Pivotvektor $\rightarrow (2,1,3)^T$ und $L_{21} = \frac{3}{4} = 0.75$ sowie $L_{31} = \frac{2}{4} = 0.5$:

$$A \rightarrow R_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0.5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivotzeile 3: Pivotvektor $\rightarrow p = (2,3,1)^T$ (d.h.: L_{21} und L_{31} vertauschen!) und $L_{32} = \frac{0.5}{1} = 0.5$:

$$R_1 \rightarrow R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.75 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Teil b)

Vertausche b gemäß $p : b \rightarrow \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 5.5 \end{pmatrix}$

Vorwärtseinsetzen : $\rightarrow y = \begin{pmatrix} 11 \\ 0.5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Rückwärtseinsetzen : $\rightarrow x = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Teil c)

$\|A\|_\infty = \max\{8,\ 14,\ 8\} = 14 \rightarrow \kappa_\infty(A) = \frac{5}{3} \cdot 14 = \frac{70}{3} = 23.3333$

Teil d)

$$\begin{aligned} r_x &\leq \frac{\kappa(A)}{1 - r_A \cdot \kappa(A)} \cdot r_A \quad (\text{falls } r_A \cdot \kappa(A) < 1) \\ \|\Delta A\|_\infty &= \max\{0.01,\ 0.03,\ 0.01\} = 0.03 \rightarrow \\ r_A &= \frac{0.03}{14} = 0.002142857 \qquad (\rightarrow r_A \cdot \kappa(A) = 0.05 < 1) \rightarrow \\ r_x &\leq \frac{0.05}{1 - 0.05} = 0.05263159 \end{aligned}$$

Da außerdem $||x||_\infty = 1$ gilt, ist der relative Fehler in x gleich dem absoluten Fehler in x.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 12+\alpha^2 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Werte von α ist A positiv definit?

b) Bestimmen Sie die Determinante von A.

c) Lösen Sie $Ax = b$ mittels Cholesky-Verfahren ($\mathrm{L\,D\,L}^T$) für $\alpha = 4$. (L-R-Zerlegung / Gauß gibt 0 Punkte!)

d) Für welche Werte von α ist $A^T A$ **nicht** positiv definit? **Begründung!!**

Teil a)

1. Cholesky-Verfahren:
   $d_{11} = 3.$
   $l_{21} = 0, \qquad l_{31} = \frac{6}{3} = 2, \qquad l_{41} = 0.$
   $d_{22} = 1 - 3 \cdot 0^2 = 1.$
   $l_{32} = (3 - 3 \cdot 0 \cdot 2)/1 = 3, \qquad l_{42} = (2 - 3 \cdot 0 \cdot 0)/1 = 2.$
   $d_{33} = 12 + \alpha^2 - 3 \cdot 2^2 - 1 \cdot 3^2 = \alpha^2 - 9.$
   $l_{43} = (6 - 3 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 2)/(\alpha^2 - 9)) = 0.$ $d_{44} = 6 - 3 \cdot 0^2 - 1 \cdot 2^2 - (\alpha^2 - 9) \cdot 0^2 = 2.$

2. L-D-L^T-Zerlegung von A:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Einschränkungen für α:
   Aus $\alpha^2 - 9 > 0$ erhält man $|\alpha| > 3$.
   Also muss $\alpha \in \mathbb{R} \backslash [-3, 3]$ sein, damit A positiv-definit ist.

Teil b)

Determinante von A:

$\det A = 3 \cdot 1 \cdot (\alpha^2 - 9) \cdot 2 = 6 \cdot (\alpha^2 - 9) = 6 \cdot \alpha^2 - 54$

Teil c) Lösung des Gleichungssystems:

$$Lz = b \rightarrow z = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$Dy = z \rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$L^T x = y \rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Teil d)

$A^T A$ nicht positiv definit:

Wenn $\alpha \in \{-3, 3\}$ ist, dann folgt aus der Betrachtung von D, dass $\det A = 0$ ist und somit dass A singulär ist. Daraus schließt man, dass $A^T A$ auch singulär ist und somit nicht positiv definit.
Oder: $A^T A$ ist genau dann positiv definit, wenn A vollen Rang hat; also hier: A regulär.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Meßwerte f_i

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & -2 & -1 & 1 \\ \hline f_i & -1/5 & -1/10 & -3 \end{array}\,.$$

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass diese Messdaten einer Funktion

$$f(t) = \frac{a\,t^2}{(t-b)^3}$$

genügen. Bestimmen Sie die Parameter a und b optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate. Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem, und führen Sie ausgehend vom Startwert $(a_0, b_0) = (3, 2)$ einen Gauß–Newton–Schritt durch. Berechnen Sie anschließend das Residuum.

Hinweis: Lösen Sie das auftretende lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen.

Die i-te Zeile des (überbestimmten) Gleichungssystems lautet

$$r_i := f(t_i) - f_i = \frac{a \cdot t_i^2}{(t_i - b)^3} - f_i \stackrel{!}{=} 0.$$

Also ist das entsprechende nicht lineare Ausgleichsproblem gegeben durch:

$$\left\| \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} f(t_1) - f_1 \\ f(t_2) - f_2 \\ f(t_3) - f_3 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{4 \cdot a}{(-2-b)^3} + \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{a}{(-1-b)^3} + \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{a}{(1-b)^3} + 3 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min$$

Die i-te Zeile der Jakobischen J ist gegeben durch (das ist ein Gradient) :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{t_i^2}{(t_i - b)^3} & \dfrac{3 \cdot a \cdot t_i^2}{(t_i - b)^4} \end{pmatrix}.$$

Setzen wir nun die Startwerte $(a_0, b_0) = (3, 2)$ in die Zeilen $(i = 1, 2, 3)$ ein, so erhalten wir (auf 7 Stellen gerundet, mit 10 Stellen gerechnet – 5stellig wäre auch OK):

$$(J| - r) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{16} & \frac{9}{64} & | & \frac{-1}{80} \\ \frac{-1}{27} & \frac{1}{9} & | & \frac{1}{90} \\ -1 & 9 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0625 & 0.140625 & | & -0.0125 \\ -0.03703704 & 0.1111111 & | & 0.01111111 \\ -1 & 9 & | & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$(J^T J| - J^T r) = \begin{pmatrix} 1.005278 & -9.012904 & | & 0.0003697274 \\ -9.012904 & 81.03212 & | & -0.0005232446 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1.005278 & -9.012904 & | & 0.0003697274 \\ 0 & 0.2261705 & | & 0.002791577164 \end{pmatrix} \to \Delta_0 = \begin{pmatrix} 0.1110282 \\ 0.01234280 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \Delta_0 = \begin{pmatrix} 3.111028 \\ 2.012343 \end{pmatrix}$$

Also:

$$f(t) \approx \frac{3.111028 \cdot t^2}{(t - 2.012343)^3}$$

Das Residuum ist $\|r\|_2 = \sqrt{0.007349630^2 + (-0.01381271)^2 + 0.001381945^2} = 0.01570725.$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y - 4\,y &= 0 \\ 1 + y^2 - 4\,x^2 &= 0 \end{aligned}$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage **aller** Lösungen verdeutlicht und geben Sie mit Hilfe Ihrer Skizze Näherungen dafür an. Bestimmen Sie für den 3. Quadranten ($x, y \leq 0$) einen *guten* ganzzahligen Bereich $[x_u, x_o] \times [y_u, y_o]$, in dem eine Lösung liegt. **Hinweis:** Aus der ersten Gleichung folgt eine Abschätzung für $|y|$. (Welche?) Deswegen darf man für die Skizze $\sin y \approx y$ verwenden.

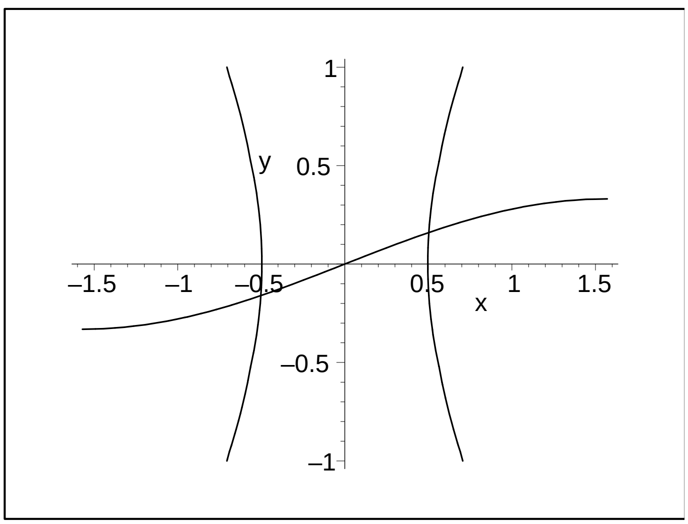
b) Geben Sie für die Lösung im dritten Quadranten eine geeignete 2D-Fixpunktgleichung an, und weisen Sie hierfür die Voraussetzungen des Fixpunksatzes von Banach nach. Begründen Sie Ihre Aussagen und schauen Sie schon mal auf c).

c) Wieviele Schritte sind ausgehend von dem Startwert $(x_0, y_0) = 0.5(x_u + x_o, y_u + y_o)$ höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit (welche Norm?) von $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$ zu erzielen.

d) Geben Sie eine a–posteriori–Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an.

Skizze: Mit dem Hinweis skizzieren wir $y = 1/3 \sin x$ und die Hyperbel in Normallage mit Hauptachsen $a = 0.5$ (x-Achsenabschnitt) und $b = 1$ (oder $y = 0 \to x = \pm 0.5$ und $y = \pm 1 \to x = \pm\sqrt{0.5} \approx \pm 0.7$.)

Da aus der ersten Gleichung $|y| \leq 0.5$ folgt, existieren nur die beiden Lösungen, die in der Skizze mit



(Symmetrie!) $(\overline{x}, \overline{y}) \approx \pm(0.5, 0.2)$ abgelesen werden können. Der gut ganzzahlige Bereich für den dritten Quadranten ist als $D = [-1, 0]^2$. D ist **konvex** und abgeschlossen.

zu b)

Wir lösen die erste Gleichung nach $y = y(x)$ und die zweite Gleichung nach x auf (so erhalten wir jedes Mal den Faktor 1/4 – **Achtung: Vorzeichen!**):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{2}\sqrt{1+y^2} \\ \dfrac{1}{4}(\sin x + \sin y) \end{pmatrix} =: F(x,y) \to F'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-y}{2\sqrt{1+y^2}} \\ \dfrac{1}{4}\cos x & \dfrac{1}{4}\cos y \end{pmatrix}$$

Abb. in sich: Wir schätzen beide Komponenten ab:

Für $y \in [-1, 0]$ gilt: $\frac{-1}{2}\sqrt{1+y^2} \in \left[\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{2}\right] = [-0.7071, -0.5] \subset [-1, 0]$.

Für $x,\ y \in [-1, 0]$ gilt: $\frac{1}{4}(\sin x + \sin y) \in \left[\frac{1}{4}(2 \cdot \sin(-1)), 0\right] = [-0.42074, 0] \subset [-1, 0]$.

kontraktiv: Wir zeigen die Kontraktivität mit F' auf ganz D (man könnte auch auf $[-0.7071, -0.5] \times [-0.5, 0]$ einschränken, ohne den in c) verlangten Startwert auszuschließen). Für die Norm von F' erhalten wir auf D die folgende Abschätzung:

$$|F'(x,y)|. \leq \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{1+0^2}} \\ \dfrac{1}{4}\cos 0 & \dfrac{1}{4}\cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Damit ist F auch kontraktiv (auf D) mit $\alpha = 0.5$. $\|.\|_\infty$ – ($\alpha = 0.75$ für $\|.\|_1$.)

zu c) (ab jetzt: 10-stellige Rechnung, Zwischenergebnisse auf 5 Stellen gerundet)

$$\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-5} \text{ und } \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (-0.5, -0.5) \to \mathbf{x}_1 = (-0.55902, -0.23971)$$

$$n \geq \frac{\ln \dfrac{\varepsilon(1-\alpha)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_\infty}}{\ln \alpha} = \frac{\ln \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}(1-\frac{1}{2})}{0.26029}}{\ln \frac{1}{2}} = 16.6\ldots \quad (42.5\ldots \text{ für } \alpha = 0.75)$$

Also bringen 17 Schritte mit Sicherheit die geforderte Genauigkeit.

zu d)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= (-0.51416, -0.19194) \text{ und} \\ \Delta\mathbf{x}_1 &= (0.044852, 0.047769) \end{aligned}$$

und somit:

$$\|\overline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_2\|_\infty \leq \frac{0.5}{1-0.5} 0.047769 = 0.047769 \leq 0.05$$

Weg ohne Klausurvorgaben: (Da mitunter die Frage kommt, wie man *besser* vorgehen würde)
Da $|x| \geq 0.5$ und $|y| \leq 0.5$ wählen wir als Startgebiet $D' = [-1, -0.5] \times [-0.5, 0]$ (konvex und abgeschlossen).
Abb. in sich: Wir schätzen beide Komponenten ab:
Für $y \in [-0.5, 0]$ gilt: $\frac{-1}{2}\sqrt{1+y^2} \in \left[\frac{-\sqrt{1.25}}{2}, \frac{-1}{2}\right] = [-0.559017, -0.5]$.
Für $x \in [-0.559017, -0.5]$, $y \in [-0.5, 0]$ gilt: $\frac{1}{4}(\sin x + \sin y) \in \left[\frac{1}{4}(\sin(-0.559017) + \sin(-0.5)), \frac{1}{4}\sin(-0.5)\right] = [-0.252445, -0.119856]$.
kontraktiv: Wir zeigen die Kontraktivität mit F' auf $D'' = [-0.559017, -0.5] \times [-0.252445, -0.119856]$ (nur dort können Fixpunkte liegen). Für die Norm von F' erhalten wir auf D'' die folgende Abschätzung:

$$|F'(x,y)|_. \leq \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{0.252445}{2\sqrt{1+0.119856^2}} \\ \dfrac{1}{4}\cos(-0.5) & \dfrac{1}{4}\cos(-0.119856) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.12533 \\ 0.21940 & 0.24821 \end{pmatrix}$$

Damit ist F auch kontraktiv (auf D'') mit $\alpha = 0.46761$. $\|.\|_\infty$ – ($\alpha = 0.34473$ für $\|.\|_1$.)

zu c)

$$\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-5} \text{ und } \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (-0.5, -0.2) \to \mathbf{x}_1 = (-0.509902, -0.169524)$$

$$n \geq \frac{\ln \dfrac{\varepsilon(1-\alpha)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_\infty}}{\ln \alpha} = 12.2\ldots$$

Also bringen 13 Schritte mit Sicherheit die geforderte Genauigkeit.

zu d)

$$\mathbf{x}_2 = (-0.507134, -0.164201)$$

und somit:

$$\|\overline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_2\|_\infty \leq 0.0047200 < 0.005$$

Wir können also nach 2 Schritten bereits einen maximalen Fehler von 0.005 garantieren – das ist um den Faktor 10 besser als die obige Variante.
Das Startgebiet lässt sich noch verkleinern. Die Kontraktionszahl wird hierdurch aber nur unwesentlich besser.

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Die Funktion (das Integral)

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

ist als Tabelle gegeben.

x	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.4
$F(x)$	0	0.37965	0.65767	0.80674	0.86527	0.88208	0.88562

a) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(1.8)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung von vier Tabellenwerte und geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung an.

b) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(0.75)$ durch eine Newton-Interpolation vom Grad 2. Geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

Hinweis: $F(x)$ ist die Stammfunktion von e^{-x^2}. Man berechen $F'(x)$ und $F''(x)$. Es gilt $F^{(3)}(x) = (4\,x^2 - 2)\,e^{-x^2}$, $\quad F^{(4)}(x) = x\,(12 - 8\,x^2)\,e^{-x^2}$, $\quad F^{(5)}(x) = (16\,x^4 - 48\,x^2 + 12)\,e^{-x^2}$

Teil a)

Für die Stelle $\bar{x} = 1.8$ wird der Anteil des Knotenpolynoms durch die Wahl der Stützstellen $(1.2,\ 1.6,\ 2.0,\ 2.4)$ minimiert. Das dazu gehörige Neville–Aitken Tableau ist: (10-stellige Rechnung, Zwischenergebnisse auf 6 Stellen gerundet)

$$\begin{array}{r|lllllll}
x_0 = 1.20 & 0.806740 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1 = 1.60 & 0.865270 & \rightarrow & 0.894535 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2 = 2.00 & 0.882080 & \rightarrow & 0.873675 & \rightarrow & 0.878890 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3 = 2.40 & 0.885620 & \rightarrow & 0.880310 & \rightarrow & 0.875334 & \rightarrow & 0.877112
\end{array}$$

es ist also $F(1.8) \approx 0.87711$.

Verlangt ist eine **möglichst gute** Fehlerabschätzung. Die Formel hierzu lautet:

$$|F(\bar{x}) - p_3(\bar{x})| \leq \frac{1}{4!} \max_{z\in[x_0,x_3]} |F^{(4)}(z)| \cdot |(\bar{x} - x_0)\,(\bar{x} - x_1)\,(\bar{x} - x_2)\,(\bar{x} - x_3)|.$$

Für die Ableitungen gilt:

$$F'(x) = e^{-x^2}, \qquad F''(x) = -2\,x\,e^{-x^2}$$

Die restlichen Ableitungen sind vorgegeben. Eine Monotonie ist nicht ersichtlich (und auch nicht vorhanden!). Zur Bestimmung der Extrema der 4. Ableitung bestimmen wir die Nullstellen der 5. Ableitung. Dies führt auf eine bi-quadratische Gleichung und die Nullstellen

$$16\,x^4 - 48\,x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{6}}{2}}$$

Man sieht: Nur $x_1 = \sqrt{(3 + \sqrt{6})/2} = 1.650680124$ ist > 1 und liegt in $[1.2, 2.4]$.

$$F^{(4)}(1.2) = 0.13647,\ F^{(4)}(x_1) = -1.0604,\ F^{(4)}(2.4) = -0.25774,\ \rightarrow \max_{z\in[1.2,2.4]} |F^{(4)}(z)| = 1.0604 < 1.07$$

$$|F(1.8) - p_3(1.8)| \leq \frac{1}{24} 1.07 \cdot 0.6^2 \cdot 0.2^2 = 0.642 \cdot 10^{-3}$$

Bem: Die grobe Abschätzung von $F^{(4)}$ durch $(12 \cdot 2.4 + 8 \cdot 2.4^3) \cdot e^{-1.2^2} = 33.026$ ist zu ungenau. Wir verlieren einen Faktor von ≈ 30. (Auch $(-12 \cdot 2.4 + 8 \cdot 2.4^3) \cdot e^{-1.2^2} = 19.379$ ist nur unwesentlich besser.)

Teil b) Knotenwahl minimiert den Anteil des Knotenpolynoms für:

$$\begin{array}{r|llllll}
0.4 & 0.379650 & & & & \\
 & & > & 0.695050 & & \\
0.8 & 0.657670 & & & > & \text{-}0.402969 \\
 & & > & 0.372675 & & \\
1.2 & 0.806740 & & & &
\end{array}$$

Die Newton–Darstellung des Interpolationspolynoms lautet in der hornerartigen Form

$$p_2(x) = 0.37965 + (x - 0.4) \cdot \{0.695050 + (x - 0.8) \cdot (-0.402969)\}.$$

Ausgewertet an der Stelle $\bar{x} = 0.75$ ergibt sich der auf 5 Stellen gerundete Wert $p_2(0.75) = 0.62997$.

Für die Fehlerabschätzung benötigen wir die Extrema der 3. Ableitung (s.o.). Die 4. Ableitung hat Nullstellen bei 0 und $\pm\sqrt{1.5} = \pm 1.22...$. Dieser Wert liegt außerhalb von $[0.4, 1.2]$. Das Extremum liegt bei 0.4 (Randextremum). Insgesamt haben wir:

$$|F(0.75) - p_2(0.75)| \leq \frac{1}{6} \cdot 1.1589 \cdot 0.35 \cdot 0.05 \cdot 0.45 \approx 1.52 \cdot 10^{-3}.$$

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Für die Bogenlänge eines Ellipsenabschnitts gilt $S = F(s_1; s_0) = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{a^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s}\, ds$ (a und b Hauptachsen). Für $a = 2$ und $b = 4$ sollen numerisch Näherungen für $F(3\pi/4, \pi/4)$ bestimmt werden.

a) Wieviele Schritte (n) braucht man mit der

1. summierten Mittelpunktregel,
2. summierten Trapezregel,

um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ zu erreichen?
Hinweis: Die abzuschätzende Ableitung hat lokale Extrema bei $z \cdot \pi/2$ mit $z \in \mathbb{Z}$

b) Bestimmen Sie mittels der summierten Simpsonregel eine Näherung für S mit einer garantierten Genauigkeit von $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$.
Hinweis: Das Maximum des Betrages der abzuschätzenden (vierten) Ableitung ist 78.

---

zu a)
Wir setzen $a = 2$ und $b = 4$ ein. Das ergibt dann für den Integranden

$$f(s) = 2 \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2 s} \to f'(s) = -6 \frac{\cos s \cdot \sin s}{\sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2 s}}$$

f und alle Ableitungen von f sind $\pi-$periodisch. Wenn wir bereits jetzt den Hinweis befolgen ($\cos(0.5 \cdot \pi) = 0$), so reicht es, die zweite Ableitung wie folgt zu berechnen (s.u.):

$$f''(s) = -6 \frac{\left(-\sin^2 s + \cos^2 s\right) \sqrt{\ldots} - \sin s \cos s \sqrt{\ldots}'}{\sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2 s}^2}$$

$$f''(0) = f''(\pi) = -6 \frac{(1)\sqrt{4} - 0\sqrt{\ldots}'}{4} = -3, \qquad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6 \to |f''(s)| \leq 6$$

Das Maximum wird an der Stelle $s = \pi/2$ im zu untersuchenden Intervall angenommen. Für den Fehler der summierten Mittelpunktsregel (auf $[\pi/4, 3\pi/4]$) gilt also:

$$f_M \leq \frac{1}{24} h_M^2 (3\pi/4 - \pi/4) 6 \leq \frac{1}{8} \pi h_M^2 \overset{!}{\leq} 5 \cdot 10^{-5} \to h_M \leq 0.01128379167$$

Und somit

$$n_M \geq \frac{\pi/2}{0.01128379167} = 139.2.. \to n_M = 140$$

Für den Fehler der summierten Trapezregel (auf $[\pi/4, 3\pi/4]$) gilt:

$$f_T \leq \frac{1}{12} h_T^2 (3\pi/4 - \pi/4) 6 \leq \frac{1}{4} \pi h_T^2 \overset{!}{\leq} 5 \cdot 10^{-5} \to h_T \leq 0.007973585411$$

Und somit

$$n_T \geq 196.8.. \to n_T = 197$$

zu b)
Für den Fehler der summierten Simpsonregel (auf $[\pi/4, 3\pi/4]$) gilt:

$$f_S \leq \frac{1}{2880} h_S^4 (3\pi/4 - \pi/4) \max_{x \in [\pi/4, 3\pi/4]} |f^{(4)}(x)| \leq \frac{1}{2880} h_S^4 \frac{\pi}{2} 78 \overset{!}{\leq} 2 \cdot 10^{-2} \to h_S \leq 0.8280413047$$

Und somit

$$n_S = 2 \quad \text{und} \quad h_S = \pi/4$$

Wir nutzen die Symmetrie und erhalten

$$I_S = 2 \frac{\pi/4}{6} (\sqrt{10} + 4 \cdot 2.399449794 + 2) = 3.864179081 \approx 3.864$$

Alternative zu a) (Ableitungen von Wurzeln: $f(x) = \sqrt{g(x)}$)

$$f(s) = 2 \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2 s} = 2 \cdot w(s) \to f'(s) = 2 \cdot \frac{-6 \cos s \cdot \sin s}{2 \cdot w(s)} = -12 \cdot \frac{\cos s \cdot \sin s}{f(s)}$$

$$f''(s) = -12 \cdot \frac{(\cos^2 s - \sin^2 s) \cdot f(s) - \cos s \cdot \sin s \cdot f'(s)}{f^2(s)}$$

Dann (lokales) Extremum bei $\pi/2$ und Randwerte.
Schön ist auch noch, wenn man weiß: $\cos s \cdot \sin s = 1/2 \cdot \sin(2 \cdot s)$