Diplom – VP **Numerik** 05. September 2005

Aufgabe 1 (8 Punkte)

a) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) := \sqrt{x^2 - 100}\,.$$

Bestimmen Sie die relative Konditionszahl $\kappa_{\mathrm{rel}}(f)$ an der Stelle $x = 10.2$.

b) Es sei nun $\tilde{x} := 10.1$ als gestörtes Eingangsdatum gegeben. Wie groß ist einerseits der zu erwartende und andererseits der tatsächliche relative Fehler r_f gegenüber dem exakten Wert $f(10.2)$. Was beobachten Sie und warum ist das möglich?

c) Bringen Sie die Funktion $f(x)$ auf eine bei $x \approx 10$ numerisch stabilere Form.

d) Berechnen Sie in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik die folgenden beiden Ausdrücke:
$[(1000 + 4) + 3] + 2$
$[(2 + 3) + 4] + 1000$
Geben Sie jeweils den absoluten Fehler gegenüber dem exakten Wert an. Welche Regel bzgl. einer günstigen Summationsreihenfolge können Sie hieraus ableiten?

---

a)

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 100}}$$

$$\kappa_{\mathrm{rel}}(f)|_{x=10.2} = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|_{x=10.2} = \left|\frac{10.2 \cdot (5.07469)}{2.009975}\right| = 25.752$$

b) zu erwartender relativer Fehler:

$$r_f \leq \kappa_{\mathrm{rel}}(f) r_x = 25.752 \left|\frac{10.1 - 10.2}{10.2}\right| = 0.2525$$

tatsächlicher relativer Fehler:

$$r_f = \left|\frac{f(10.1) - f(10.2)}{f(10.2)}\right| = \left|\frac{1.41774 - 2.009975}{2.009975}\right| = 0.2946$$

Der tatsächliche Fehler kann durchaus größer sein als der erwartete Fehler, weil die Abschätzung $r_f \leq \kappa_{\mathrm{rel}}(f) r_x$ nur in erster Näherung bzgl. r_x gilt.

c) numerisch stabilere Form: $f(x) = \sqrt{(x - 10)(x + 10)}$.

d) exakt: $1000 + 4 + 3 + 2 = 1009$

3-stellige GPA, Variante 1:

$$1000 + 4 = 1004 =_3 1000, \quad 1000 + 3 = 1003 =_3 1000, \quad 1000 + 2 = 1002 =_3 1000$$

absoluter Fehler: $|1000 - 1009| = 9$

3-stellige GPA, Variante 2:

$$2 + 3 =_3 5, \quad 5 + 4 =_3 9, \quad 9 + 1000 = 1009 =_3 1010,$$

absoluter Fehler: $|1010 - 1009| = 1$, also wesentlich genauer!

$\Rightarrow$ Regel: Die betragsgrößten Summanden zuletzt aufaddieren!

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -15 & 45 & 40 \\ 0.7 & 0.1 & -0.2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 25 \\ 1.1 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie eine Zeilenskalierung von A durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix D (mit skalierter Matrix $B := DA$) explizit an.

b) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von B mit Spaltenpivotisierung, d. h. $PB = LR$. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

c) Bestimmen Sie die Determinante von A.

d) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung aller Matrizen (D, P, L, R).

e) Setzen Sie die verwendeten Verfahren (Zeilenskalierung, Pivotisierung) in Bezug zu den Begriffen "Kondition" und "Stabilität".

---

a) Zeilenäquilibrierung:

$$D = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := DA = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.3 & 0.5 \\ -0.15 & 0.45 & 0.4 \\ 0.7 & 0.1 & -0.2 \end{pmatrix}$$

b) LR-Zerlegung:

$$\begin{array}{ccc} 0.2 & -0.3 & 0.5 \\ -0.15 & 0.45 & 0.4 \\ 0.7 & 0.1 & -0.2 \end{array} \overset{\text{Pivot}(3,2,1)}{\Longrightarrow} \begin{array}{ccc} 0.7 & 0.1 & -0.2 \\ -0.15 & 0.45 & 0.4 \\ 0.2 & -0.3 & 0.5 \end{array} \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c|cc} 0.7 & 0.1 & -0.2 \\ \hline -0.2143 & 0.4714 & 0.3571 \\ 0.2857 & -0.3286 & 0.5571 \end{array}$$

$$\text{2. Spalte: Pivotisierung trivial (entfällt also)} \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} \begin{array}{cc|c} 0.7 & 0.1 & -0.2 \\ \hline -0.2143 & 0.4714 & 0.3571 \\ 0.2857 & -0.6970 & 0.8061 \end{array}$$

also: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ("in welcher Spalte steht jeweils die Eins?", nie als Matrix speichern!),

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.2143 & 1 & 0 \\ 0.2857 & -0.6970 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & -0.2 \\ 0 & 0.4714 & 0.3571 \\ 0 & 0 & 0.8061 \end{pmatrix}$$

c) $\det(A) = \det(D^{-1}P^{-1}LR) = \dfrac{\det(R)}{\det(D)\det(P)} = \dfrac{\det(R)}{\det(D)}(-1)^{\#\text{Zeilenvert.}} = -\dfrac{0.7 \cdot 0.4714 \cdot 0.8061}{0.1 \cdot 0.01 \cdot 1} = -266$

d) rechte Seite:

$$Db = \begin{pmatrix} 3.2 \\ 0.25 \\ 1.1 \end{pmatrix}, \qquad PDb = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.25 \\ 3.2 \end{pmatrix} = LRx = Ly \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.4857 \\ 3.2242 \end{pmatrix} = Rx \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e) Die Zeilenskalierung (Zeilenäquilibrierung) dient der Konditionsverbesserung des Problems.
Die Spaltenpivotisierung (bei vorheriger Zeilenäquilibrierung) dient der Stabilisierung des Algorithmus.

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{16 - \dfrac{y^2}{4}} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln(x-2)}{3} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y)$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [3,4] \times [0,1]$ erfüllt sind. Verwenden Sie bei der Definition der Kontraktionskonstante die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (3.99, 0.5)$ zwei Fixpunktiterationen durch, d. h. berechnen Sie (x_2, y_2).

c) Geben Sie eine a–priori und eine a–posteriori–Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an unter Verwendung der $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Warum ist das Ergebnis gemäß der a–posteriori–Abschätzung meist wesentlich genauer als gemäß der a–priori–Abschätzung?

---

a) i) E ist abgeschlossen und konvex.

ii) Selbstabbildung: Sowohl F_1 als auch F_2 hängen nur von einer Variablen ab und sind bezüglich dieser in E monoton. Extrema können also nur auf den Ecken von E liegen:

$$F_1(x,0) = \sqrt{16} = 4, \qquad F_1(x,1) = \sqrt{16 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{63}}{2} = 3.9686$$

$$F_2(3,y) = \frac{1}{2} + \frac{\ln(3-2)}{3} = \frac{1}{2}, \qquad F_2(4,y) = \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{3} = 0.73105$$

$\widetilde{E} := F(E) = [3.9686, 4] \times [0.5, 0.73105] \subset E \Rightarrow F$ ist selbstabbildend auf E.

iii) Kontraktivität: Als Jacobi-Matrix ergibt sich

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-y}{4\sqrt{16 - \frac{y^2}{4}}} \\ \dfrac{1}{3(x-2)} & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Beträge der beiden nichtverschwindenden Elemente, $|F'_{12}|$ und $|F'_{21}|$, jeweils nur von einer Variablen abhängen und bezüglich dieser in E monoton wachsend bzw. monoton fallend sind, gilt

$$\max_{x,y\in E} ||F'(x,y)||_\infty = ||F'(3,1)||_\infty = \max\left(\frac{1}{4\sqrt{16 - \frac{1}{4}}}, \frac{1}{3(3-2)}\right) = \max(0.0630, 0.\overline{3}) = 0.\overline{3} \le 0.3334 =: L < 1$$

d. h. F ist kontraktiv auf E. Somit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Bemerkung:
$$\max_{x,y\in \widetilde{E}} ||F'(x,y)||_\infty = ||F'(3.9686, 0.73105)||_\infty = \max\left(\frac{0.73105}{4\sqrt{16 - \frac{0.73105^2}{4}}}, \frac{1}{3(3.9686-2)}\right)$$

$$= \max(0.04588, 0.16932) = 0.16932$$

b)

$$\text{Startwert:} \qquad x^0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3.99 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{1. Schritt:} \qquad x^1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{16 - \dfrac{0.5^2}{4}} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln(3.99-2)}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.9922 \\ 0.7294 \end{pmatrix}$$

$$\text{2. Schritt:} \qquad x^2 := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{16 - \frac{0.7294^2}{4}} \\ \frac{1}{2} + \frac{\ln(3.9922-2)}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.9833 \\ 0.72974 \end{pmatrix}$$

c)

$$\|x^1 - x^0\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 3.9922 - 3.99 \\ 0.7294 - 0.5 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.00218 \\ 0.2294 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.2294$$

$$\|x^2 - x^1\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 3.9922 - 3.9833 \\ 0.72938 - 0.72974 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0.0088394 \\ 0.00036479 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.0088394$$

Mit $L := 0.3334$ ergibt sich:

$$\text{a–priori:} \quad \|x^2 - x^*\|_\infty \leq \frac{L^2}{1-L}\|x^1 - x^0\|_\infty = \frac{0.3334^2}{1-0.3334}\,0.22938 = 3.8249 \cdot 10^{-2},$$

$$\text{a–posteriori:} \quad \|x^2 - x^*\|_\infty \leq \frac{L}{1-L}\|x^2 - x^1\|_\infty = \frac{0.3334}{1-0.3334}\,0.0088394 = 4.4210 \cdot 10^{-3}.$$

Bemerkung: Mit $L := 0.1694$ ergibt sich entsprechend:

$$\text{a–priori:} \quad \|x^2 - x^*\|_\infty \leq \frac{0.1694^2}{1-0.1694}\,0.22938 = 7.9248 \cdot 10^{-3},$$

$$\text{a–posteriori:} \quad \|x^2 - x^*\|_\infty \leq \frac{0.1694}{1-0.1694}\,0.0088394 = 1.8028 \cdot 10^{-3}.$$

Der Fehler $\|x^2 - x^*\|_\infty$ gemäß der a–posteriori-Abschätzung ist meist kleiner als a–priori erwartet, weil in die a–posteriori-Abschätzung **höhere** Iterierte (hier x^2) eingehen, die die Kontraktionsbedingung bereits entsprechend oft übererfüllen konnten (wegen $||F'(x)|| \leq L$).
Oder genauer:

$$\frac{\varepsilon_{\text{posteriori}}}{\varepsilon_{\text{priori}}} := \frac{\frac{L}{1-L}\|x^k - x^{k-1}\|}{\frac{L^k}{1-L}\|x^1 - x^0\|} = \frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{L^{k-1}\|x^1 - x^0\|} = \frac{\|x^k - x^{k-1}\|}{L\|x^{k-1} - x^{k-2}\|} \cdots \frac{\|x^2 - x^1\|}{L\|x^1 - x^0\|} \leq 1,$$

weil die Kontraktions-(Lipschitz-)bedingung

$$||x^{j+1} - x^j|| = ||F(x^j) - F(x^{j-1})|| \leq L||x^j - x^{j-1}||, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

gilt, die bei jedem Iterationsschritt nicht nur erfüllt, sondern (wegen $||F'(x)|| \leq L$) meist übererfüllt wird.

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Die Funktion $y(t) := t^{-\alpha}\cos(\beta t)$ soll im Sinne minimaler Fehlerquadrate an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	0.6	0.75	1	1.3
y_i	−2.5	0.02	0.99	−0.2

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem explizit auf in Abhängigkeit von α und β durch Einsetzen aller Messwerte.

b) Stellen Sie das lineare Ausgleichsproblem, das im k-ten Iterationsschritt des Gauß-Newton-Verfahrens zu lösen ist, explizit auf in Abhängigkeit von α_k und β_k durch Einsetzen aller Messwerte.

Hinweis: Vorsicht beim Differenzieren! Es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}t^{-\alpha} = -t^{-\alpha}\ln t$.

c) Für die Startwerte $\alpha_0 = 2$, $\beta_0 = 2\pi$ ergibt sich im ersten Iterationsschritt des Gauß-Newton-Verfahrens das linearisierte Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{pmatrix} -1.148 & 0.98 \\ 0 & 1.333 \\ 0 & 0 \\ 0.048 & -0.732 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\alpha_0 \\ \Delta\beta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.253 \\ -0.02 \\ 0.01 \\ 0.017 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min$$

Lösen Sie dieses mittels Givens-Rotationen und bestimmen Sie $\alpha_1 := \alpha_0 + \Delta\alpha_0$ und $\beta_1 := \beta_0 + \Delta\beta_0$.

d) Bestimmen Sie nach diesem Iterationsschritt sowohl das Residuum des linearisierten als auch des nichtlinearen Ausgleichsproblems.

---

a) Die i-te Zeile des Residuums lautet

$$F_i := y(t_i) - y_i = t_i^{-\alpha}\cos(\beta t_i) - y_i.$$

Somit ergibt das folgende nichtlineare Ausgleichsproblem:

$$\|F\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.6^{-\alpha}\cos(\beta\cdot 0.6) + 2.5 \\ 0.75^{-\alpha}\cos(\beta\cdot 0.75) - 0.02 \\ 1^{-\alpha}\cos(\beta\cdot 1) - 0.99 \\ 1.3^{-\alpha}\cos(\beta\cdot 1.3) + 0.2 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min$$

b) Wir definieren $x := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, wodurch die i-te Zeile der Ableitung ($m \times n$ Jakobi-Matrix) F' lautet:

$$\begin{pmatrix} -t_i^{-\alpha}\ln(t_i)\cos(\beta t_i) & -t_i^{1-\alpha}\sin(\beta t_i) \end{pmatrix}.$$

Setzen wir nun die iterierten Werte α_k, β_k sowie die gegebenen Messwerte (t_i, y_i) in die Zeilen $(i = 1, 2, 3, 4)$ ein, so erhalten wir für das Gauß-Newton-Verfahren das lineare Ausgleichsproblem

$$\|(F'(x^k)\Delta x^k + F(x^k)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -0.6^{-\alpha_k}\ln(0.6)\cos(\beta_k\cdot 0.6) & -0.6^{1-\alpha_k}\sin(\beta_k\cdot 0.6) \\ -0.75^{-\alpha_k}\ln(0.75)\cos(\beta_k\cdot 0.75) & -0.75^{1-\alpha_k}\sin(\beta_k\cdot 0.75) \\ -1^{-\alpha_k}\ln(1)\cos(\beta_k\cdot 1) & -1^{1-\alpha_k}\sin(\beta_k\cdot 1) \\ -1.3^{-\alpha_k}\ln(1.3)\cos(\beta_k\cdot 1.3) & -1.3^{1-\alpha_k}\sin(\beta_k\cdot 1.3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\alpha_k \\ \Delta\beta_k \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 2.5 + 0.6^{-\alpha_k}\cos(\beta_k\cdot 0.6) \\ -0.02 + 0.75^{-\alpha_k}\cos(\beta_k\cdot 0.75) \\ -0.99 + 1^{-\alpha_k}\cos(\beta_k\cdot 1) \\ 0.2 + 1.3^{-\alpha_k}\cos(\beta_k\cdot 1.3) \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min$$

c) Mit den Startwerten $x^0 := \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 \\ 2\pi \end{pmatrix}$ ergibt sich im ersten Gauß-Newton-Schritt das lineare Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{pmatrix} -1.148 & 0.98 \\ 0 & 1.333 \\ 0 & 0 \\ 0.048 & -0.732 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\alpha_0 \\ \Delta\beta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.253 \\ -0.02 \\ 0.01 \\ 0.017 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min$$

Die Givens-Rotationen sind anzuwenden auf

$$[F' \mid -F] = \left(\begin{array}{cc|c} -1.148 & 0.98 & -0.253 \\ 0 & 1.333 & 0.02 \\ 0 & 0 & -0.01 \\ 0.048 & -0.732 & -0.017 \end{array}\right)$$

Eliminiere Element $(4,1)$:

$a := -1.148$, $b := 0.048$, $r := \sqrt{a^2+b^2} = 1.149$, $c := a/r = -0.9991$, $s := b/r = 0.04178$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} 1.149 & -1.010 & 0.2521 \\ 0 & 1.333 & 0.02 \\ 0 & 0 & -0.01 \\ 0 & 0.6904 & 0.02755 \end{array}$$

Eliminiere Element $(4,2)$:

$a = 1.333$, $b = 0.6904$, $r := \sqrt{a^2+b^2} = 1.501$, $c := a/r = 0.8880$, $s := b/r = 0.4599$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} 1.149 & -1.01 & 0.2521 \\ 0 & 1.501 & 0.03043 \\ 0 & 0 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0.01527 \end{array}$$

Aus den ersten beiden Zeilen ergibt sich durch Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$\Delta x^0 := \begin{pmatrix} \Delta\alpha_0 \\ \Delta\beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2372 \\ 0.02027 \end{pmatrix} \Rightarrow x^1 := x^0 + \Delta x^0 = \begin{pmatrix} 2 + 0.2372 \\ 2\pi + 0.02027 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.237 \\ 6.3035 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$$

Somit erhält man nach der ersten Gauß-Newton-Iteration die Näherung $y(t) \approx t^{-2.237}\cos(6.3035 \cdot t)$.

d) Das Residuum der linearen Näherung ist die 2-Norm der letzten $m - n = 4 - 2 = 2$ Zeilen der transformierten rechten Seite:

$$\mathrm{res}_{\mathrm{lin}} = \|F'(x^0)\Delta x^0 + F(x^0)\| = \left\| \begin{pmatrix} -0.01 \\ 0.01527 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0.01825.$$

Das Residuum des nichtlinearen Ausgleichsproblems erhält man durch Einsetzen von x^1 in die nichtlineare Funktion F:

$$\mathrm{res}_{\mathrm{exact}} = \|F(x^1)\| = \left\| \begin{pmatrix} 0.6^{-2.237}\cos(6.3035 \cdot 0.6) + 2.5 \\ 0.75^{-2.237}\cos(6.3035 \cdot 0.75) - 0.02 \\ 1^{-2.237}\cos(6.3035 \cdot 1) - 0.99 \\ 1.3^{-2.237}\cos(6.3035 \cdot 1.3) + 0.2 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -0.01414 \\ 0.008937 \\ 0.009794 \\ 0.01431 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0.02409$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

a) Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	1	2	3
y_i	0	0.12946	0.87652	1.39501

Bestimmen Sie an der Stelle $x = 1.5$ den Wert $p_3(1.5)$ des Interpolationspolynoms dritten Grades, indem Sie das folgende Neville-Aitken-Schema komplettieren:

$$
\begin{array}{r|lllllll}
x_0 = 0 & 0 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1 = 1 & 0.12946 & \rightarrow & 0.19419 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2 = 2 & 0.87652 & \rightarrow & & \rightarrow & 0.42579 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3 = 3 & 1.39501 & \rightarrow & 0.61728 & \rightarrow & 0.53156 & \rightarrow &
\end{array}
$$

Geben Sie eine möglichst scharfe Fehlerabschätzung für $p_3(1.5)$ unter der Annahme, dass die Werte zu der Funktion $y(x) := \int_0^x \sin(\pi t^2/8)\mathrm{d}t$ gehören, und dass $x_0^{(5)} := 1.8359$ die einzige Nullstelle von $y^{(5)}(x)$ im Intervall $(0, 3)$ ist.

Hinweis: Es gilt $y^{(4)}(x) = -\frac{\pi^2}{16}\left[3x\sin(\pi x^2/8) + \frac{\pi x^3}{4}\cos(\pi x^2/8)\right]$.

b) Gegeben seien nun die Bedingungen $q_3(0) = 0$, $q_3'(0) = 1$, $q_3(1) = 1$, $q_3'(1) = 0$. Stellen Sie das Interpolationspolynom $q_3(x)$ unter Verwendung des Newton-Schemas auf.

c) Warum ist es nicht sinnvoll, den Polynomgrad bei der Interpolation sehr groß zu wählen?

---

a) Neville–Aitken Tableau:

$$
\begin{array}{r|lllllll}
x_0 = 0 & 0 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1 = 1 & 0.12946 & \rightarrow & 0.19419 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2 = 2 & 0.87652 & \rightarrow & 0.50299 & \rightarrow & 0.42579 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3 = 3 & 1.39501 & \rightarrow & 0.61728 & \rightarrow & 0.53156 & \rightarrow & 0.47868
\end{array}
$$

Es ist also $y(1.5) \approx p_3(1.5) = 0.47868$.

$$
y^{(4)}(x) = -\frac{\pi^2}{16}\left[3x\sin(\pi x^2/8) + \frac{\pi x^3}{4}\cos(\pi x^2/8)\right]
$$

Randwerte und gegebene Extremstelle von $y^{(4)}$ einsetzen: $y^{(4)}(0) = 0$, $y^{(4)}(3) = 14.2096$, $y^{(4)}(1.8359) = -4.0277$. Da $y^{(4)}$ stetig differenzierbar ist, gilt somit $\max_{x\in[0,3]} |y^{(4)}(x)| = 14.2096$, und man erhält die Fehlerabschätzung

$$
\big|p_3(1.5) - y(1.5)\big| \leq \big|(1.5-0)(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)\big| \frac{1}{24} \max_{x\in[0,3]} |y^{(4)}(x)| = \frac{9}{16}\,\frac{14.2096}{24} = 0.3330
$$

b) Um die ersten n Ableitungen an einer Stützstelle x_i erfassen zu können, wird x_i $(n+1)$-mal im Newton-Tableau aufgenommen. Die sich in der k-ten Spalte ergebenden Terme "$\frac{0}{0}$" werden ersetzt durch die vorgegebenen Werte $\frac{f^{(k)}(x_i)}{k!}$:

$$
\begin{array}{r|lllllll}
0 & \mathbf{0} & & & & & & \\
 & & > & \frac{f'(0)}{1!} = \mathbf{1} & & & & \\
0 & 0 & & & > & \frac{1-1}{1-0} = \mathbf{0} & & \\
 & & > & \frac{1-0}{1-0} = 1 & & & > & \frac{-1-0}{1-0} = \mathbf{-1} \\
1 & 1 & & & > & \frac{0-1}{1-0} = -1 & & \\
 & & > & \frac{f'(1)}{1!} = 0 & & & & \\
1 & 1 & & & & & &
\end{array}
$$

Das Interpolationspolynom $p_3(x)$ lautet somit

$$p_3(x) = 0 + 1(x-0) + 0(x-0)(x-0) - 1(x-0)(x-0)(x-1) = x + x^2 - x^3.$$

c) Mit zunehmendem Polynomgrad können bei äquidistanten Stützstellen die **Oszillationen** des Knotenpolynoms insbesondere am Rand des Interpolationsintervalls über alle Maßen wachsen.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(t) - 2ty'(t) + y(t) = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

a) Formulieren Sie das äquivalente System erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie eine Näherung für $y''(1/2)$, indem Sie zwei Schritte mit dem expliziten Eulerverfahren machen.

c) Bestimmen Sie eine Näherung für $y''(1/2)$, indem Sie einen Schritt mit der (impliziten) Trapezregel machen. Lösen Sie das sich dabei ergebende lineare Gleichungssystem mit einer Gauß-Elimination.

d) Welche Problemklasse ergibt sich, wenn man ein implizites Verfahren verwendet, um ein nichtlineares System von Anfangswertproblemen zu lösen? Welches in der Vorlesung besprochene Verfahren würden Sie hierbei verwenden?

---

a) Umformen in System erster Ordnung:

$$\begin{array}{c} y_1 := y, \quad y_2 := y' = y_1' \\ 2ty' - y = 2ty_2 - y_1 = y'' = y_2' \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ 2ty_2 - y1 \end{pmatrix} =: f(t,y), \qquad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: y^0$$

b) Euler explizit: 2 Schritte, $h = 1/4$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1/4$, $t_2 = 1/2$:

$$y^1 := y^0 + hf(t_0, y^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 2\cdot 0 \cdot 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$y^2 := y^1 + hf(t_1, y^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 2\cdot \frac{1}{4}(-\frac{1}{4}) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{16} \\ -\frac{17}{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9375 \\ -0.5312 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in Differentialgleichung: $y''(t) = 2ty'(t) - y(t)$

$$y''(1/2) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot y'(1/2) - y(1/2) = -\frac{17}{32} - \frac{15}{16} = -\frac{47}{32} = -1.4688$$

c) Trapezregel (implizit):

$$y^{j+1} := y^j + \frac{h}{2}\left[f(t_j, y^j) + f(t_{j+1}, y^{j+1})\right] = y^j + \frac{h}{2}\begin{pmatrix} y_2^j \\ 2t_j y_2^j - y_1^j \end{pmatrix} + \frac{h}{2}\begin{pmatrix} y_2^{j+1} \\ 2t_{j+1}y_2^{j+1} - y_1^{j+1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} & 1 - ht_{j+1} \end{pmatrix} y^{j+1} = y^j + \frac{h}{2}\begin{pmatrix} y_2^j \\ 2t_j y_2^j - y_1^j \end{pmatrix}$$

ein Schritt: $j = 0$: $t_j = t_0 = 0$, $t_{j+1} = t_1 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} & 1 - ht_1 \end{pmatrix} y^1 = y^0 + \frac{h}{2}\begin{pmatrix} y_2^0 \\ 2t_0 y_2^0 - y_1^0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 2\cdot 0\cdot 0 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \text{System:} \quad \begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array} \quad \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & \frac{13}{16} & -\frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow y^1 = \begin{pmatrix} \frac{11}{13} \\ \frac{-8}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.84615 \\ -0.61538 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y(1/2) \\ y'(1/2) \end{pmatrix}$$

Einsetzen in Differentialgleichung: $y''(t) = 2ty'(t) - y(t)$

$$\Rightarrow \quad y''(1/2) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot y'(1/2) - y(1/2) = -\frac{8}{13} - \frac{11}{13} = -\frac{19}{13} = -1.4615$$

d) Wendet man ein implizites Verfahren auf ein nichtlineares Anfangswertproblem (höherer Ordnung bzw. mehrdimensional) an, ergibt sich ein nichtlineares Gleichungssystem. Dieses kann mit dem Newton-Verfahren gelöst werden.