Diplom – VP **Numerik** 27. März 2006

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung (ohne Zeilenäquilibrierung), d. h. $PA = LR$. Geben Sie die Matrizen L und R explizit an.

b) Lösen Sie in 3-stelliger Gleitpunktarithmetik das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der LR-Zerlegung aus Teil a) (sonst 0 Punkte!).

c) Für den relativen Fehler der Matrix A gelte nun $r_A \leq 5 \cdot 10^{-4}$. Wie groß darf der relative Fehler r_b der rechten Seite b höchstens werden, damit für den relativen Fehler der Lösung $r_x \leq 10^{-2}$ gilt? Wie groß darf r_A höchstens sein, damit die Fehlerformel verwendet werden darf?
Hinweis: Verwenden Sie hierbei stets die $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Es gilt $\|A^{-1}\|_\infty = 1.133$.

---

a) LR-Zerlegung in 3-stelliger GPA:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{array} \quad \overset{\text{Pivot}(2,1,3)}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{array} \quad \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -1 \\ 0.333 & -3 & 4 \end{array}$$

$$\overset{\text{Pivot}(2,3,1)}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0.333 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{array} \quad \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0.333 & -3 & 4 \\ \hline 0 & -0.667 & 1.67 \end{array}$$

$$\text{also:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.333 & 1 & 0 \\ 0 & -0.667 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1.67 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (“in welcher Spalte steht jeweils die Eins?”, nie als Matrix speichern!),

b) Anwendung von P auf die rechte Seite, Vorwärtseinsetzen, Rückwärtseinsetzen in 3-stelliger GPA:

$$Pb = \begin{pmatrix} 9 \\ 25 \\ -8 \end{pmatrix} = LRx = Ly \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 9 \\ 22.0 \\ 6.7 \end{pmatrix} = Rx \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.00 \\ 4.01 \end{pmatrix}$$

c) Die Zeilensummennorm ist $\|A\|_\infty = 8$, so dass sich für die Kondition ergibt

$$\kappa := \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 8 \cdot 1.133 = 9.064$$

Für $r_A \kappa < 1$ gilt die Fehlerformel

$$r_x \leq \kappa \frac{r_A + r_b}{1 - r_A \kappa} \overset{!}{\leq} 10^{-2},$$

d. h. für den relativen Fehler der rechten Seite muss gelten

$$\Leftrightarrow \quad r_b \overset{!}{\leq} 10^{-2} \frac{1 - r_A \kappa}{\kappa} - r_A = 10^{-2} \frac{1 - 5 \cdot 10^{-4} \cdot 9.064}{9.064} - 5 \cdot 10^{-4} = 5.98 \cdot 10^{-4}.$$

Die verwendete Fehlerformel ist gültig für

$$r_A \kappa < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad r_A < \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{9.064} = 0.1103.$$

Aufgabe 2 (9 Punkte)

a) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an. (Berechnung über LR-Zerlegung gibt 0 Punkte!)

b) Für welche Werte von α und β ist A positiv definit?

c) Bestimmen Sie die Determinante von A.

d) Es sei nun

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $LDL^T x = b$.

---

a) Cholesky-Zerlegung:

$$d_{11} = a_{11} = 2, \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = -\frac{1}{2}, \qquad l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = 0$$

$$d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{3}{2}, \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} d_{11} l_{21}}{d_{22}} = \frac{\beta - 0}{\frac{3}{2}} = \frac{2\beta}{3}$$

$$d_{33} = \alpha_{33} - l_{31}^2 d_{11} - l_{32}^2 d_{22} = \alpha - 0 - \left(\frac{2\beta}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \alpha - \frac{2}{3}\beta^2$$

$$\text{also:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - \frac{2}{3}\beta^2 \end{pmatrix}.$$

b) A ist positiv definit, wenn alle Diagonalelemente von D positiv sind, d. h. wenn $\alpha > \frac{2}{3}\beta^2$ gilt.

c) $\det A = \det(LDL^T) = \det(D) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\alpha - \frac{2}{3}\beta^2\right) = 3\alpha - 2\beta^2$

d) L (Vorwärtseinsetzen): $\quad b = LDL^T x = Lz \quad \Rightarrow \quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$

D (Diagonale): $\quad Dy = z \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

L^T (Rückwärtseinsetzen): $\quad L^T x = y \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.25\sqrt{1-\frac{y^2}{16}} \\ \frac{(x+1)^2}{7} + 1.5 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(y) \\ F_2(x) \end{pmatrix} =: F(x,y)$$

a) Skizzieren Sie die Kurven $x = F_1(y)$ und $y = F_2(x)$ und markieren Sie alle Schnittpunkte der beiden Kurven.

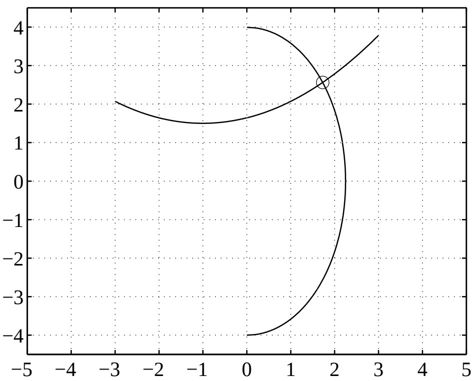
b) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für $F(x,y)$ in $E := [1,2] \times [2,3]$ erfüllt sind. (Reduktion auf eine einzige Gleichung durch gegenseitiges Einsetzen gibt 0 Punkte!)

c) Wie viele Iterationsschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (1.5, 2.5)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon := 10^{-3}$ anzunähern?

d) Geben Sie eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm an.

---

a) Die erste Gleichung beschreibt die rechte Hälfte einer Ellipse in Normallage, die zweite eine Parabel:



b)

i) E ist abgeschlossen und konvex.

ii) Selbstabbildung: Sowohl F_1 als auch F_2 hängen nur von einer Variablen ab und sind bezüglich dieser in E monoton. Extrema können also nur auf den Ecken von E liegen:

$$F_1(2) = 2.25\sqrt{1-\frac{4}{16}} = 1.9486, \qquad F_1(3) = 2.25\sqrt{1-\frac{9}{16}} = 1.4882$$

$$F_2(1) = \frac{(1+1)^2}{7} + 1.5 = 2.0714, \qquad F_2(2) = \frac{(2+1)^2}{7} + 1.5 = 2.7857$$

$\widetilde{E} := F(E) = [1.4882, 1.9486] \times [2.0714, 2.7857] \subset E \Rightarrow F$ ist selbstabbildend auf E.

iii) Kontraktivität: Als Jacobi-Matrix ergibt sich

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2.25\,\frac{-\frac{2y}{16}}{2\sqrt{1-\frac{y^2}{16}}} \\ 2\,\frac{x+1}{7} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2.25\,y}{16\sqrt{1-\frac{y^2}{16}}} \\ 2\,\frac{x+1}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Beträge der beiden nichtverschwindenden Elemente, $|F'_{12}|$ und $|F'_{21}|$, jeweils nur von einer Variablen abhängen und bezüglich dieser in E monoton wachsend sind, gilt (sowohl in $\|\cdot\|_1$- als auch $\|\cdot\|_\infty$-Norm)

$$\max_{x,y\in E} ||F'(x,y)||_\infty = ||F'(2,3)||_\infty = \max\left(\frac{2.25\cdot 3}{16\sqrt{1-\frac{3^2}{16}}}, 2\,\frac{2+1}{7}\right) = \max\left(0.6378, \frac{6}{7}\right) = \frac{6}{7} \le 0.8572 =: L < 1$$

d. h. F ist kontraktiv auf E. Somit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

$$\text{Bemerkung:}\quad \max_{x,y\in\widetilde{E}} ||F'(x,y)||_\infty = ||F'(1.9486, 2.7857)||_\infty = \max\left(\frac{2.25\cdot 2.7857}{16\sqrt{1-\frac{2.7857^2}{16}}}\,,\,2\,\frac{1.9486+1}{7}\right)$$

$$= \max(0.5459, 0.8425) = 0.8425$$

c)

$$\text{Startwert:}\qquad x^0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{1. Schritt:}\qquad x^1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.25\sqrt{1-\dfrac{2.5^2}{16}} \\ \dfrac{(1.5+1)^2}{7}+1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7564 \\ 2.3929 \end{pmatrix}$$

$$\|x^1 - x^0\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} 1.7564-1.5 \\ 2.3929-2.5 \end{pmatrix}\right\|_\infty = \begin{pmatrix} 0.2564 \\ -0.1071 \end{pmatrix}\|_\infty = 0.2564$$

A-priori-Abschätzung:

$$n \geq \frac{\ln\frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^1-x^0\|}}{\ln L} = \frac{\ln\frac{10^{-3}(1-0.8572)}{0.2564}}{\ln 0.8572} = 48.63.$$

Es sind also höchstens $n = 49$ Schritte erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon := 10^{-3}$ zu erreichen.

d)

$$\text{2. Schritt:}\qquad x^2 := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.25\sqrt{1-\dfrac{2.3929^2}{16}} \\ \dfrac{(1.7564+1)^2}{7}+1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8030 \\ 2.5854 \end{pmatrix}$$

$$\|x^2 - x^1\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} 1.8030-1.7564 \\ 2.5854-2.3929 \end{pmatrix}\right\|_\infty = \begin{pmatrix} 0.0466 \\ 0.1925 \end{pmatrix}\|_\infty = 0.1925$$

A-posteriori-Abschätzung:

$$\|x^2 - x^*\|_\infty \leq \frac{L}{1-L}\|x^2-x^1\|_\infty = \frac{0.8572}{1-0.8572}\,0.1925 = 1.1555$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Die Ebene E sei definiert durch den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und die beiden Richtungsvektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$,

$$E := \{x \in \mathbb{R}^3 : \quad x = x_0 + \alpha u + \beta v, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Gesucht ist derjenige Punkt $x \in E$, welcher in der $\|\cdot\|_2$-Norm den kürzesten Abstand zu dem außerhalb der Ebene liegenden Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ hat.

a) Formulieren Sie diese Aufgabe als lineares Ausgleichsproblem.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem für den speziellen Fall

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}$$

mittels Givens-Rotationen.
Bestimmen Sie den Abstand zwischen x und y in der $\|\cdot\|_2$-Norm.

c) Unter welchen Bedingungen wird die Kondition (gemessen in der $\|\cdot\|_2$-Norm) eines linearen Ausgleichsproblems besonders schlecht?

---

a) Das lineare Ausgleichsproblem (Dimension $(m \times n) = (3 \times 2)$) lautet

$$\|x - y\|_2 = \|\alpha u + \beta v + x_0 - y\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 - x_{01} \\ y_2 - x_{02} \\ y_3 - x_{03} \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}.$$

b) Die Givens-Rotationen sind anzuwenden auf

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}}$$

Eliminiere Element $(3,1)$:
$a := 1$, $b := -2$, $r := \sqrt{a^2 + b^2} = 2.236$, $c := a/r = 0.4472$, $s := b/r = -0.8944$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} 2.236 & -3.578 & -1.3416 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -0.4472 & 1.789 \end{array}$$

Eliminiere Element $(3,2)$:
$a = -3$, $b = -0.4472$, $r := \sqrt{a^2 + b^2} = 3.033$, $c := a/r = -0.9891$, $s := b/r = -0.1474$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} 2.236 & -3.578 & -1.3416 \\ 0 & 3.033 & 0.7253 \\ 0 & 0 & -1.917 \end{array}$$

Aus den ersten $n = 2$ Zeilen ergibt sich durch Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2174 \\ 0.2391 \end{pmatrix}$$

Der Abstand $\|x - y\|_2$ ist das Residuum des linearen Ausgleichsproblems, d. h. die $\|\cdot\|_2$-Norm der letzten $m - n = 3 - 2 = 1$ Zeilen der rechten Seite nach der QR-Transformation:

$$\|x - y\|_2 = 1.917.$$

c) Die Kondition des linearen Ausgleichsproblems ist gegeben durch $\frac{\kappa_2(A)}{\cos(\theta)}$. Sie wächst also mit zunehmender Kondition κ_2 der Matrix A, sowie für $\cos(\theta) \to 0$, d. h. $b \perp \text{Bild}(A)$ (Erzeugnis, aufgespannt von den Spaltenvektoren der Matrix A).

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	1	1.5	2	2.5	3
y_i	0	0.4055	0.6931	0.9163	1.0986

a) Berechnen Sie die vier fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

$$\begin{array}{l|lllllllll}
x_0 = 1 & 0 \\
 & & \searrow \\
x_1 = 1.5 & 0.4055 & \rightarrow & [\mathbf{x_0},\mathbf{x_1}]\mathbf{y} \\
 & & \searrow & & \searrow \\
x_2 = 2 & 0.6931 & \rightarrow & 0.5754 & \rightarrow & \text{-}0.2356 \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
x_3 = 2.5 & 0.9163 & \rightarrow & 0.4463 & \rightarrow & [\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},\mathbf{x_3}]\mathbf{y} & \rightarrow & 0.0710 \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
x_4 = 3 & 1.0986 & \rightarrow & [\mathbf{x_3},\mathbf{x_4}]\mathbf{y} & \rightarrow & \text{-}0.0816 & \rightarrow & 0.0316 & \rightarrow & [\mathbf{x_0},\mathbf{x_1},\mathbf{x_2},\mathbf{x_3},\mathbf{x_4}]\mathbf{y}
\end{array}$$

b) Stellen Sie das Interpolationspolynom $p_4(x)$ vom Grad 4 in Newton- oder Horner-artiger Form auf.

c) Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen Fehler $|p_4(x) - y(x)|$ im **Intervall** $[1, 3]$ an unter der Annahme, dass die Tabellenwerte zu der Funktion $y(x) = \int_0^x \ln(t)dt$ gehören.
Hinweis: Für das Knotenpolynom ist keine Extremwertbetrachtung gefordert, sondern eine einfache Abschätzung ausreichend.

d) Wie klein muss allgemein der äquidistante Abstand h zwischen den $n+1$ Stützstellen $x_0 \ldots x_n$ gewählt werden, damit unter den Annahmen $|y^{(n+1)}(x)| \leq M$ und $\prod_{j=0}^{n} |x - x_j| \leq n! h^{n+1}$ für den Fehler des Interpolationspolynoms $p_n(x)$ vom Grade n gilt: $|p_n(x) - y(x)| < \varepsilon$?

---

a) Newton-Schema:

$$\begin{array}{l|lllllllll}
x_0 = 1 & 0 \\
 & & \searrow \\
x_1 = 1.5 & 0.4055 & \rightarrow & \boxed{0.8110} \\
 & & \searrow & & \searrow \\
x_2 = 2 & 0.6931 & \rightarrow & 0.5754 & \rightarrow & \text{-}0.2356 \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
x_3 = 2.5 & 0.9163 & \rightarrow & 0.4463 & \rightarrow & \boxed{\text{-}0.1291} & \rightarrow & 0.0710 \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
x_4 = 3 & 1.0986 & \rightarrow & \boxed{0.3646} & \rightarrow & \text{-}0.0816 & \rightarrow & 0.0316 & \rightarrow & \boxed{\text{-}0.0197}
\end{array}$$

b) Interpolationspolynom in Horner-artiger Form:

$$p_4(x) = 0 + (x-1)\big\{0.8110 + (x-1.5)\big[-0.2356 + (x-2)\big(0.0710 + (x-2.5)\cdot(-0.0197)\big)\big]\big\}.$$

c) Knotenpolynom: einfachste, aber sehr grobe Abschätzung für $x \in [1, 3]$:

$$|x-1| \cdot |x-1.5| \cdot |x-2| \cdot |x-2.5| \cdot |x-3| \leq 2 \cdot 1.5 \cdot 1 \cdot 1.5 \cdot 2 = 9 \qquad \text{(scharf wäre 0.1135)}$$

(**Bemerkung:** Bessere Abschätzung: Im schlimmstmöglichen Fall liegt x zwischen einem der beiden äußersten Stützstellenpaare, z. B. $x \in [x_0, x_1]$. Mit $h := x_1 - x_0$ gilt (Symmetrie!) stets $|x - x_0| \cdot |x - x_1| \leq |\frac{x_0+x_1}{2} - x_0| \cdot |\frac{x_0+x_1}{2} - x_1| = \frac{h^2}{4}$, so dass man hier mit $h = 0.5$ erhält
$|x-1|\cdot|x-1.5|\cdot|x-2|\cdot|x-2.5|\cdot|x-3| \leq \frac{0.5^2}{4}\cdot 1\cdot 1.5\cdot 2 = \frac{3}{16} = 0.1875$ (fast so gut wie der scharfe Wert 0.1135))

Ableitungen: $y'(x) = \ln(x), \quad y''(x) = \frac{1}{x}, \quad y'''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad y^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3}, \quad y^{(5)}(x) = -\frac{6}{x^4}$

Maximum: $\max_{\xi \in [1,3]} |y^{(5)}(\xi)| = \left|-\frac{6}{1}\right| = 6$

Fehlerformel:

$$\max_{x \in [1,3]} |p_4(x) - y(x)| \leq \max_{x \in [1,3]} |x-1| \cdot |x-1.5| \cdot |x-2| \cdot |x-2.5| \cdot |x-3| \, \frac{1}{5!} \max_{\xi \in [1,3]} |y^{(5)}(\xi)| \leq 9 \cdot \frac{1}{120} \cdot 6 = \frac{9}{20} = 0.45$$

(bzw. $\leq \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{120} \cdot 6 = \frac{3}{320} = 9.375 \cdot 10^{-3}$ im Falle der etwas besseren Abschätzung des Knotenpolynoms)

d) Fehlerformel: $|p_n(x) - y(x)| = \dfrac{|y^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} |x - x_j| \leq \dfrac{M}{(n+1)!}\, n! h^{n+1} = \dfrac{M}{n+1}\, h^{n+1} \overset{!}{\leq} \varepsilon$

$$\Leftrightarrow h \overset{!}{\leq} \left(\varepsilon \frac{n+1}{M}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Das Integral

$$I := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

soll mit der summierten Trapezregel und anschließender Romberg-Extrapolation zur Schrittweitenfolge $h_i := 2\pi \cdot 2^{-i}$, $i = 0, 1, \ldots, m = 3$ approximiert werden.

a) Bestimmen Sie die drei eingerahmten Werte T_{10}, T_{31}, T_{33} in dem folgenden Extrapolationsschema:

$$\begin{array}{lclclcl}
T(h_0) = T_{00} = 0 & & & & & & \\
& \searrow & & & & & \\
T(h_1) = \mathbf{T_{10}} = \boxed{} & \rightarrow & T_{11} & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & & \\
T(h_2) = T_{20} = 3.57080 & \rightarrow & T_{21} & \rightarrow & 3.68220 & & \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
T(h_3) = T_{30} = 3.67102 & \rightarrow & \mathbf{T_{31}} = \boxed{} & \rightarrow & 3.70379 & \rightarrow & \mathbf{T_{33}} = \boxed{}
\end{array}$$

Hinweis: Es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

b) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler $|T(h_3) - I|$ an.
Hinweis: Mit $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ gilt $\max_{x\in[-\pi,\pi]} |f^{(2)}(x)| = \frac{1}{3}$.

c) Schätzen Sie den Fehler $|T_{32} - I|$.

d) Warum spielt Auslöschung beim Romberg-Algorithmus keine Rolle?

e) Wie hängt der Fehler $|T_{mm} - I|$ von m ab?
Ist es bei endlicher relativer Maschinengenauigkeit eps sinnvoll, m beliebig groß zu wählen (Begründung!)?

---

a) Mit $h_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ erhält man mit der summierten Trapezregel

$$T_{10} = \pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(-\pi)}{-\pi} + 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(\pi)}{\pi}\right) = \pi = 3.14159.$$

Vollständiges Extrapolationsschema:

$$\begin{array}{lclclcl}
T(h_0) = T_{00} = 0 & & & & & & \\
& \searrow & & & & & \\
T(h_1) = T_{10} = \boxed{3.14159} & \rightarrow & 4.18879 & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & & \\
T(h_2) = T_{20} = 3.57080 & \rightarrow & 3.71386 & \rightarrow & 3.68220 & & \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
T(h_3) = T_{30} = 3.67102 & \rightarrow & \boxed{3.70442} & \rightarrow & 3.70379 & \rightarrow & \boxed{3.70414}
\end{array}$$

b) Für die summierte Trapezregel mit $n = \frac{b-a}{h}$ Teilintervallen gilt die Fehlerformel

$$|T(h) - I| \le n\,\frac{h^3}{12} \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)| = h^2\,\frac{b-a}{12} \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)|.$$

Mit $b - a = 2\pi$ und $h_3 = \frac{\pi}{4}$ gilt daher mit $\max_{x\in[-\pi,\pi]} |f^{(2)}(x)| = \frac{1}{3}$

$$|T(h_3) - I| \le \frac{\pi^2}{16}\,\frac{2\pi}{12}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi^3}{288} = 0.1077.$$

c) Es gilt $|T_{32} - I| = |T_{32} - T_{33} + T_{33} - I| \le |T_{32} - T_{33}| + |T_{33} - I| \approx |T_{32} - T_{33}| = |3.70414 - 3.70379| = 3.43 \cdot 10^{-4}$, wegen $|T_{33} - I| \ll |T_{32} - T_{33}|$.

d) Da bei dem Romberg-Algorithmus $T_{ij} := \frac{4^j T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}$ keine etwa gleich großen Werte voneinander subtrahiert werden, spielt Auslöschung keine Rolle.

e) Es gilt $|T_{ij} - I| \sim h_i^{2(j+1)} = \left(h_0 2^{-i}\right)^{2(j+1)}$, d. h. $|T_{mm} - I| \sim \left(h_0 2^{-m}\right)^{2(m+1)}$.
Aufgrund der unvermeidlichen Rundungsfehler ist es bei endlicher relativer Maschinengenauigkeit eps nicht sinnvoll, m beliebig groß zu wählen.