Institut für Geometrie und Praktische Mathematik **RWTH – Aachen**

Diplom – VP **Numerik** 28. August 2006

Multiple-Choice-Test (20 Punkte)

Bei jeder MC-Aufgabe ist **mindestens eine Aussage korrekt**. Wird dennoch bei einer MC-Aufgabe keine einzige Aussage angekreuzt, gilt diese Aufgabe als **nicht bearbeitet** und wird mit **0 Punkten** bewertet. Ansonsten gibt es für **jede falsche Antwort −0.5 Punkte**, und für **jede korrekte Antwort 0.5 Punkte**, so dass man pro MC-Aufgabe −2 bis 2 Punkte erreichen kann. Da aus dem MC-Test als Ganzes keine negativen Punkte entstehen dürfen, kann man bei 10 MC-Aufgaben **insgesamt zwischen 0 und 20 Punkten** erreichen.
Um Flüchtigkeitsfehlern vorzubeugen, sind **durchgängig nur korrekte Aussagen anzukreuzen**.

MC 1 Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Die Konditionszahl einer Funktion gibt an, wie stark sich Eingabefehler verstärken, wenn man exakte Arithmetik zur Auswertung benutzt.
- ○ Die Konditionszahl einer Funktion ist nie größer als 1.
- ○ Ein stabiler Algorithmus impliziert eine gute Kondition.
- ○ Die Konditionszahl einer Funktion gibt an, wie stark sich Eingabefehler aufgrund von Instabilitäten im verwendeten Algorithmus verstärken.

MC 2. Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ und $b, \Delta b, x, \Delta x \in \mathbb{R}^n$ mit $b \neq 0$ sei x die Lösung von $A\,x = b$ und $x + \Delta x$ die Lösung von $A\,(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Es sei $\|.\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. die zugehörige Matrix–Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$
- ○ $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A\|^{-1} \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$
- ⊗ $\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\Delta b\|$
- ○ $\|\Delta x\| \leq \|A\|\,\|\Delta b\|$

MC 3. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine allgemeine, reguläre Matrix und $x, b \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = b$. Weiter sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv–definite Matrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen zur Zahl der benötigten Operationen (kurz "Ops") (nur Multiplikationen und Divisionen) an.

- ○ Die Lösung von $R\,x = b$ benötigt $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops
- ⊗ Die Lösung von $A\,x = b$ per Gaußelimination benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops
- ○ Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops
- ⊗ Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{6} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops

MC 4. Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $\mathrm{Rang}(A) = n$. Weiter sei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, so dass $Q\,A = R$ gilt. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2 \quad$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$
- ○ $\|A\,x - b\|_2 = \|QR\,x - b\|_2 \quad$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$
- ⊗ Die Matrix R kann man mittels Givens–Rotationen bestimmen
- ○ Die Matrix R kann man mittels Gauß–Elimination bestimmen

MC 5. Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Falls $\Phi'(x^*) < 0$ gilt, so existiert kein $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$
- ⊗ Falls $|\Phi'(x^*)| < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $|x_0 - x^*|$ hinreichend klein
- ○ Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel größer als 1
- ⊗ Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $|x_0 - x^*|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1

MC 6. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an. Beim Newton–Verfahren wird oft eine Dämpfungsstrategie benutzt. Diese dient dazu,

○ die Konvergenzordnung des Verfahrens zu verbessern

○ globale Konvergenz des Verfahrens zu gewährleisten

⊗ den Einzugsbereich des Verfahrens zu vergrößern

○ den Rechenaufwand pro Iteration zu dämpfen

MC 7. Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

○ $P(\Phi \mid x_0, \ldots, x_n) = \Phi$ für alle Polynome Φ

⊗ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$

○ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$

○ Der Fehler $\max_{x\in[x_0,x_n]} \left|P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\right|$ wird für wachsendes n immer kleiner

MC 8. Es sei $I := \int_c^d f(x)\,dx$, $h := d - c$, $m > 0$ und $x_j = c + \frac{j\,h}{m}$ für $j = 0, \ldots, m$. Wir definieren $I_m(f) := \int_c^d P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)\,dx$ wobei $P(f \mid x_0, \ldots, x_m)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_m))$ mit $x_0 < \ldots < x_m$ ist. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

○ $I_m(f)$ definiert die Gauß-Quadratur zur Approximation von I

⊗ $I_2(f) = \frac{h}{6}\left(f(c) + 4f(\frac{d+c}{2}) + f(d)\right)$

○ Für alle m gilt: $I_m(f) = \sum_{i=0}^m w_i\, f(x_i)$ mit $w_i \geq 0$

⊗ $I_m(x^k) = \int_c^d x^k\,dx$ für alle $k = 0, \ldots, m$

MC 9. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'''(t) + y'(t)^2 = t\,y(t) + e^t \quad \text{mit} \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 1.$$

Wir setzen $z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))^T$. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Anfangswertprobleme zu dem obigen Problem äquivalent sind.

○ $z'(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ t\,z_1(t) - z_2(t)^2 + e^t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad z(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

⊗ $z'(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ t\,z_1(t) - z_2(t)^2 + e^t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

○ $z'(t) = \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ z_3'(t) \\ t\,z_1(t) - z_2(t)^2 + e^t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

○ $z'(t) = \begin{pmatrix} t\,z_1(t) \\ z_2(t)^2 \\ z_3(t) + z_2(t)^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad z(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

MC 10. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

○ Für steife Probleme ist das implizite Euler–Verfahren besser geeignet als das explizite Euler–Verfahren, weil beim impliziten Verfahren die Konsistenzordnung höher ist

○ Für steife Probleme ist das implizite Euler–Verfahren besser geeignet als das explizite Euler–Verfahren, weil beim impliziten Verfahren die Konvergenzordnung höher ist

○ Das Stabilitätsintervall des klassischen Runge–Kutta–Verfahrens ist $(-\infty, 0)$

⊗ Das Stabilitätsintervall der Trapezmethode ist $(-\infty, 0)$

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 20 & -10 & 0 \\ 0.1 & -0.4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ -1.3 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie eine Zeilenskalierung von A durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix D (mit skalierter Matrix $B := DA$) explizit an.

b) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von B mit Spaltenpivotisierung, d. h. $PB = LR$. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung aller Matrizen (D, P, L, R).

---

a) Zeilenäquilibrierung:

$$D = \begin{pmatrix} 0.3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03333 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := DA = \begin{pmatrix} 0 & 0.6667 & -0.3333 \\ 0.6667 & -0.3333 & 0 \\ 0.2 & -0.8 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) LR-Zerlegung:

$$B \overset{\text{Pivot}(2,1,3)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0.6667 & -0.3333 & 0 \\ 0 & 0.6667 & -0.3333 \\ 0.2 & -0.8 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0.6667 & -0.3333 & 0 \\ 0 & 0.6667 & -0.3333 \\ 0.3 & -0.7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Pivot}(2,3,1)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0.6667 & -0.3333 & 0 \\ 0.3 & -0.7 & 0 \\ 0 & 0.6667 & -0.3333 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0.6667 & -0.3333 & 0 \\ 0.3 & -0.7 & 0 \\ 0 & -0.9524 & -0.33 \end{pmatrix}$$

$$\text{also:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & -0.9524 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0.6667 & -0.333 & 0 \\ 0 & -0.7 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3333 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (“in welcher Spalte steht jeweils die Eins?”, nie als Matrix speichern!).

c) Anwendung von PD auf die rechte Seite, Vorwärtseinsetzen, Rückwärtseinsetzen in 3-stelliger GPA:

$$Db = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.6667 \\ -2.6 \end{pmatrix}, \qquad PDb = \begin{pmatrix} 0.6667 \\ -2.6 \\ 1 \end{pmatrix} = LRx = Ly \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 0.6667 \\ -2.8 \\ -1.667 \end{pmatrix} = Rx \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^2}, \tag{1}$$

$$\text{mit} \qquad A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Lösen Sie das Ausgleichsproblem (1) mittels Householder-Spiegelungen. Gehen Sie dabei **nicht** zu den Normalgleichungen über (sonst 0 Punkte!).

b) Berechnen Sie die Norm des Residuums. Setzen Sie hierzu **nicht** die Lösung aus a) in (1) ein (sonst 0 Punkte!).

---

a) $j = 1$: alle Zeilen, erste Spalte von $[A|b]$:

$$y := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \|y\|_2 = 5, \qquad v := y + \text{sign}(y_1)\,\|y\|_2\, e_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \frac{2}{v^T v} = 0.025,$$

restliche Spalten:
$$R := \left[\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{array}\right], \qquad h := v^T R = \left[\begin{array}{c|c} 16 & 16 \end{array}\right], \qquad r := \beta v h = \left[\begin{array}{c|c} 3.2 & 3.2 \\ 1.6 & 1.6 \\ 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$R - r = \left[\begin{array}{c|c} -1.2 & -2.2 \\ -1.6 & 0.4 \\ 1 & -3 \end{array}\right]. \tag{2}$$

$j = 2$: unterer Block in "altem" $R - r$, davon erste Spalte:

$$y := \begin{pmatrix} -1.6 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \|y\|_2 = 1.887, \qquad v := y + \text{sign}(y_1)\,\|y\|_2\, e_1 = \begin{pmatrix} -3.487 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta := \frac{2}{v^T v} = 0.1520,$$

restliche Spalte:
$$R := \begin{bmatrix} 0.4 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad h := v^T R = \begin{bmatrix} -4.395 \end{bmatrix}, \qquad r := \beta v h = \begin{bmatrix} 2.329 \\ -0.6680 \end{bmatrix},$$

$$R - r = \begin{bmatrix} -1.929 \\ -2.332 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

(2), (3) wieder zusammenfassen und jeweils $-\text{sign}(y_1)\,\|y\|_2$ auf die Hauptdiagonale schreiben:

$$Q^T[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} -5 & -1.2 & -2.2 \\ 0 & 1.887 & -1.929 \\ 0 & 0 & -2.332 \end{array}\right].$$

Lösung durch Rückwärtseinsetzen im oberen (2×2)-Teil $\to x = \begin{pmatrix} 0.6854 \\ -1.022 \end{pmatrix}$.

b) Norm des Residuums: $\|-2.332\|_2 = 2.332$.

Aufgabe 3 (11 Punkte)
Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\dfrac{y^2}{4}} \\ \dfrac{3}{4\pi}\sin\Big(\pi\,\dfrac{x+y}{2}\Big) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y)$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0,1]\times[0,1]$ erfüllt sind. Verwenden Sie die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.
Hinweis: Die Funktion $f(y) := -\frac{y}{4\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}$ ist monoton fallend in $[0,1]$.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0.9, 0.2)$ zwei Fixpunktiterationen durch, d. h. berechnen Sie (x_2, y_2).

c) Wie viele Iterationsschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0.9, 0.2)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon := 10^{-3}$ anzunähern?

d) Geben Sie eine a–posteriori–Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an unter Verwendung der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

---

a)

i) E ist abgeschlossen und konvex.

ii) Selbstabbildung: F_1 hängt nur von y ab, d. h. $F_1 = F_1(y)$ und ist monoton (fallend) in $[0,1]$. Extrema können also nur an den Rändern angenommen werden:

$$F_1(1) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660 \qquad F_1(0) = 1.$$

In E gilt $0 \le \frac{x+y}{2} \le 1$ und somit $0 \le \sin\big(\pi\,\frac{x+y}{2}\big) \le 1$. Folglich gilt $0 \le F_2(x,y) \le \frac{3}{4\pi} = 0.2387$.

Insgesamt gilt also $\widetilde{E} := F(E) = [0.8660, 1] \times [0, 0.2387] \subset E \Rightarrow F$ ist selbstabbildend auf E.

iii) Kontraktivität: Da E konvex ist, dürfen wir die Ableitung benutzen. Als Jacobi-Matrix ergibt sich

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-\frac{2y}{4}}{2\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} \\ \frac{3}{4\pi}\,\frac{\pi}{2}\cos\big(\pi\,\frac{x+y}{2}\big) & \frac{3}{4\pi}\,\frac{\pi}{2}\cos\big(\pi\,\frac{x+y}{2}\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-y}{4\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}} \\ \frac{3}{8}\cos\big(\pi\,\frac{x+y}{2}\big) & \frac{3}{8}\cos\big(\pi\,\frac{x+y}{2}\big) \end{pmatrix}$$

$F'_{1,2}$ hängt nur von y ab und ist monoton (fallend) in $[0,1]$. Extrema können also nur an den Rändern angenommen werden:

$$F'_{1,2}(0) = 0, \qquad F'_{1,2}(1) = \frac{-1}{4\sqrt{\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -0.2887.$$

Wegen $-1 \le \cos\big(\pi\,\frac{x+y}{2}\big) \le 1$ gilt in E ferner

$$0 \le |F'_{2,1}(x,y)| = |F'_{2,2}(x,y)| \le \frac{3}{8}\,.$$

Insgesamt folgt

$$\max_{x,y\in E} ||F'(x,y)||_\infty \le \max\Big(0.2887\,,\ \frac{3}{8}+\frac{3}{8}\Big) = \frac{3}{4} = 0.75 =: L < 1$$

d. h. F ist kontraktiv auf E. Somit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Bemerkung: In $\widetilde{E}$ gilt $0.2089 = \cos\big(\pi\,\frac{0.8660+0}{2}\big) \ge \cos\big(\pi\,\frac{x+y}{2}\big) \ge \cos\big(\pi\,\frac{1+0.2387}{2}\big) = -0.3662$ und somit $\max_{x,y\in\widetilde{E}} ||F'(x,y)||_\infty \le \max\Big(\frac{0.2387}{4\sqrt{1-\frac{0.2387^2}{4}}}\,,\ 2\cdot\frac{3}{8}\cdot 0.3663\Big) = \max\big(0.06011\,,\ 0.2747\big) \le 0.275 =: \widetilde{L} < 1$, d. h. durch die kluge Wahl von $\widetilde{E}$ statt E erhält man eine erheblich bessere Kontraktionskonstante.

b)

$$\text{Startwert:} \qquad x^0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\text{1. Schritt:} \qquad x^1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9950 \\ 0.2358 \end{pmatrix}, \qquad x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} 0.0950 \\ 0.0358 \end{pmatrix}$$

$$\text{2. Schritt:} \qquad x^2 := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9930 \\ 0.2232 \end{pmatrix}, \qquad x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} -0.0020 \\ -0.0126 \end{pmatrix}$$

c) Es gilt $\|x^1 - x^0\|_\infty = 0.0950$ und somit gemäß a-priori-Abschätzung

$$n \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^1-x^0\|}}{\ln L} = \frac{\ln \frac{10^{-3}(1-0.75)}{0.0950}}{\ln 0.75} = 20.65.$$

Es sind also höchstens $n = 21$ Schritte erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon := 10^{-3}$ zu erreichen.

Bemerkung: Mit $\widetilde{L}$ folgt $n \geq \dfrac{\ln \dfrac{10^{-3}(1-0.275)}{0.0950}}{\ln 0.275} = 3.78$, d. h. in Wahrheit reichen sogar schon $n = 4$ Schritte.

d) A-posteriori-Abschätzung:

$$\|x^2 - x^*\|_\infty \leq \frac{L}{1-L} \|x^2 - x^1\|_\infty = \frac{0.75}{1-0.75} \, 0.0126 = 0.03773$$

Bemerkung: Mit $\widetilde{L}$ erhält man a-posteriori $\|x^2 - x^*\|_\infty \leq 0.00478$.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	1	2
y_i	0	0.7468	0.8821

a) Bestimmen Sie an der Stelle $x = 1.5$ den Wert $p_2(1.5)$ des Interpolationspolynoms zweiten Grades, indem Sie das zugehörige Neville-Aitken-Schema aufstellen. Geben Sie $p_2(1.5)$ explizit an.

b) Geben Sie eine möglichst scharfe Fehlerabschätzung für $p_2(1.5)$ unter der Annahme, dass die Werte zu der Funktion $y(x) := \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ gehören, und dass die Nullstellen der vierten Ableitung von $y(x)$ bei $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{1.5}$ angenommen werden.

---

a) Neville–Aitken Tableau:

$$
\begin{array}{l|lclcl}
x_0 = 0 & 0 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_1 = 1 & 0.7468 & \rightarrow & 1.120 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
x_2 = 2 & 0.8821 & \rightarrow & 0.8145 & \rightarrow & 0.8909
\end{array}
$$

Es ist also $y(1.5) \approx p_2(1.5) = 0.8909$ (Wert unten rechts im Tableau).

b)

$$y'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

$$y''(x) = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

$$y'''(x) = (4x^2 - 2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

(Bem.: $y^{(4)} = (8x - 8x^3 + 4x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = 4x(3 - 2x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2} \rightarrow x_0 = 0,\ x_{1,2} = \pm\sqrt{1.5}$)

Randwerte und gegebene Nullstellen von $y^{(4)}$ einsetzen:

$$y'''(0) = -2, \qquad y'''(2) = 14\,\mathrm{e}^{-4} = 0.2564, \qquad y'''(\sqrt{1.5}) = 0.8925.$$

Da y''' stetig differenzierbar ist, gilt somit $\max_{x\in[0,2]} |y'''(x)| = 2$, und man erhält die Fehlerabschätzung

$$\bigl|p_2(1.5) - y(1.5)\bigr| \leq \bigl|(1.5-0)(1.5-1)(1.5-2)\bigr|\,\frac{1}{3!}\max_{x\in[0,2]}|y'''(x)| = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{1}{8} = 0.125$$