Diplom – VP **Numerik** 26. März 2007

Multiple-Choice-Test (20 Punkte)

Bei jeder MC-Aufgabe ist **mindestens eine Aussage korrekt**. Wird dennoch bei einer MC-Aufgabe keine einzige Aussage angekreuzt, gilt diese Aufgabe als **nicht bearbeitet** und wird mit **0 Punkten** bewertet. Ansonsten gibt es für **jede falsche Antwort −0.5 Punkte**, und für **jede korrekte Antwort 0.5 Punkte**, so dass man pro MC-Aufgabe −2 bis 2 Punkte erreichen kann. Da aus dem MC-Test als Ganzes keine negativen Punkte entstehen dürfen, kann man bei 10 MC-Aufgaben **insgesamt zwischen 0 und 20 Punkten** erreichen.
Um Flüchtigkeitsfehlern vorzubeugen, sind **durchgängig nur korrekte Aussagen anzukreuzen**.

MC 1 Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Die Subtraktion zweier nahezu gleich großer Zahlen ist gut konditioniert.
- ⊗ Die Subtraktion zweier betragsmäßig stark unterschiedlicher Zahlen ist gut konditioniert.
- ○ Die Division zweier nahezu gleich großer Zahlen ist schlecht konditioniert.
- ○ Die Exponentialfunktion e^x ist gut konditioniert für alle $x \in \mathbb{R}$.

MC 2 Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ In dreistelliger Gleitpunktarithmetik mit Standardrundung erhält man als Ergebnis von $1 + 5 \cdot 10^{-3}$ den Wert 1.01.
- ○ In vierstelliger Gleitpunktarithmetik mit Standardrundung erhält man als Ergebnis von $1 + 10^{-4}$ den Wert 1.0001.
- ⊗ Unter Verwendung der Standardrundung sind relative Rundungsfehler stets kleiner als die relative Maschinengenauigkeit.
- ○ Die relative Maschinengenauigkeit ist der Quotient aus der betragskleinsten und der betragsgrößten Maschinenzahl.

MC 3. Mit $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}$ und der zweimal differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien $r_x := \left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right|$ und $r_f := \left|\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)}\right|$ die relativen Fehler der Ein- und Ausgabe, und es gelten die Definitionen $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) := \left|\frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}\right|$ sowie $\kappa_{\mathrm{rel},\infty}(x) := \left|\frac{x}{f(x)}\right| \cdot \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |f'(\xi)|$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an, wobei $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$ sowie $\kappa_{\mathrm{rel},\infty}(x) < \infty$ vorausgesetzt sei.

- ○ $r_f \leq \kappa_{\mathrm{rel}}(x) \cdot r_x$ gilt stets für alle $x \in \mathbb{R}$.
- ⊗ $r_f \leq \kappa_{\mathrm{rel}}(x) \cdot r_x$ gilt nur in erster Näherung bezüglich $\tilde{x} - x$.
- ⊗ $r_f \leq \kappa_{\mathrm{rel},\infty}(x) \cdot r_x$ gilt stets für alle $x \in \mathbb{R}$.
- ○ $r_f \leq \kappa_{\mathrm{rel},\infty}(x) \cdot r_x$ gilt nicht unbedingt für alle $x \in \mathbb{R}$.

MC 4. Mit $b, \tilde{b}, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $Ax = b$ und $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ seien $r_b := \frac{\|\tilde{b}-b\|}{\|b\|}$, $r_x := \frac{\|\tilde{x}-x\|}{\|x\|}$ und $r_A := \frac{\|\tilde{A}-A\|}{\|A\|}$ die relativen Fehler der rechten Seite, der Lösung und der Matrix, und es gelten die Definitionen $\kappa_A := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ sowie $h := \|\tilde{A} - A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Hierbei sei $\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. die zugehörige Matrix–Norm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$, und es sei $\|b\|, \det(A) \neq 0$ vorausgesetzt. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Es gilt stets $r_x \leq \kappa_A \frac{r_A + r_b}{1-h}$.
- ⊗ $r_x \leq \kappa_A \frac{r_A + r_b}{1-h}$ gilt stets, wenn $h < 1$ gilt.
- ○ $\|\tilde{x} - x\| \leq \|A\|^{-1} \cdot \|\tilde{b} - b\|$ gilt stets, wenn $h = 0$ gilt.
- ⊗ $\|\tilde{x} - x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\tilde{b} - b\|$ gilt stets, wenn $h = 0$ gilt.

MC 5. Ein lineares Gleichungssystem soll mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden. Der Algorithmus kann mittels Zeilenäquilibrierung bzw. Pivotisierung erweitert werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Durch Zeilenäquilibrierung verringert sich der Rechenaufwand des Gauß-Algorithmus.
- ⊗ Bei exakter Rechnung ist der Gauß-Algorithmus mit Pivotisierung für eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme stets durchführbar.
- ⊗ Die Zeilenäquilibrierung ist in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm die optimale Diagonalskalierung.
- ○ Pivotisierung verbessert die Kondition des Gauß-Algorithmus.

MC 6. Mit mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min_{x \in \mathbb{R}}$ gelöst werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Normalgleichungen tragen ihren Namen, weil das damit berechnete Residuum senkrecht auf b steht.
- ◯ Wegen $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$ sind die Normalgleichungen für die numerische Lösung großer Gleichungssysteme besonders geeignet.
- ◯ Im Gegensatz zu Givens-Rotationen lässt sich mit Householder-Spiegelungen das Residuum $\|Ax - b\|_2$ nicht direkt aus dem transformierten System ablesen, sondern man muss erst $Ax-b$ explizit ausrechnen.
- ⊗ Bei der Verwendung einer QR-Transformation (Givens/Householder) muss die Matrix Q nicht explizit aufgestellt werden, um die Lösung x zu erhalten.

MC 7. Das skalare bzw. vektorwertige Nullstellenproblem $f(x) = 0$ soll iterativ gelöst werden. Hierbei sei $\|x_k - x^*\|$ die Norm des Fehlers in Iterationsschritt k. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Konvergenzordnung $p \geq 1$ bedeutet, dass sich $\|x_k - x^*\|$ von Iteration zu Iteration asymptotisch jeweils um den Faktor p verringert.
- ⊗ Die Konvergenzordnung $p \geq 1$ bedeutet, dass sich die Anzahl korrekter Stellen (d. h. der Logarithmus von $\|x_k - x^*\|$) von Iteration zu Iteration asymptotisch jeweils um den Faktor p vergrössert.
- ⊗ Beim Bisektionsverfahren für skalare Nullstellenprobleme liegt im Gegensatz zum Fixpunktverfahren die gesuchte Nullstelle stets zwischen dem neuen Iterationswert x_k und dem alten Iterationswert x_{k-1}.
- ⊗ Die ständige Wiederverwendung einer zuvor durchgeführten LR-Zerlegung der Jacobi-Matrix beschleunigt das modifizierte Newton-Verfahren.

MC 8. Eine skalare Funktion $f(x)$ soll mittels Interpolation an verschiedenen Stützstellen im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ durch ein Polynom $p(x)$ approximiert werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Mit dem bekannten Wert y berechnet das Neville-Aitken-Verfahren den Wert $p(y)$, ohne das Polynom $p(x)$ allgemein für beliebige x aufzustellen.
- ◯ Setzt man den bekannten Wert y in das Newtonpolynom $p(x)$ ein, erhält man nicht den Wert $p(y)$, den das entsprechende Neville-Aitken-Schema liefert.
- ⊗ Die Newton-Interpolation liefert dasselbe Interpolationspolynom wie die Lagrange-Interpolation.
- ◯ Für jede ausreichend oft stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ kann man den Fehler $\max_{x \in I} |f(x) - p(x)|$ beliebig klein machen, indem man einfach die Anzahl der äquidistanten Interpolationspunkte in I groß genug macht.

MC 9. Das Integral $I := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Newton-Cotes-Formeln basieren auf der Integration des Interpolationspolynoms zu äquidistanten Stützstellen.
- ⊗ Die Simpsonregel (3 Stützstellen) ist exakt, falls $f(x)$ ein quadratisches Polynom ist.
- ⊗ Bei Gauß-Quadraturformeln sind die Stützstellen im allgemeinen nicht äquidistant.
- ◯ Unabhängig von $f(x)$ ist eine Gauß-Quadraturformel stets genauer als eine Newton-Cotes-Formel mit derselben Stützstellenanzahl.

MC 10. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Das Newton-Verfahren (Nullstellensuche) lässt sich als Fixpunktiteration formulieren.
- ◯ Das Levenberg-Marquardt-Verfahren lässt sich nicht als Fixpunktiteration formulieren.
- ◯ Beim Gauß-Newton-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.
- ⊗ Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.

Aufgabe 1 (11 Punkte)

a) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 9 \\ -3 & 5 & 4 & -9 \\ 0 & 4 & 17-\alpha^2 & 0 \\ 9 & -9 & 0 & 31 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an. (Berechnung über LR-Zerlegung gibt 0 Punkte!)

b) Für welche Werte von α ist A positiv definit?

c) Für welche Werte von α ist A^TA positiv definit?

d) Bestimmen Sie die Determinante von A für $\alpha = 2$.

e) Es sei nun

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 36 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $LDL^Tx = b$. (Berechnung über LR-Zerlegung gibt 0 Punkte!)

---

a) Cholesky-Zerlegung:

$$d_{11} = a_{11} = 3, \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = \frac{-3}{3} = -1, \qquad l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = \frac{0}{3} = 0, \qquad l_{41} = \frac{a_{41}}{d_{11}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = 5 - (-1)^2 \cdot 3 = 2, \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}d_{11}l_{21}}{d_{22}} = \frac{4 - 0\cdot 3 \cdot (-1)}{2} = 2,$$

$$l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}d_{11}l_{21}}{d_{22}} = \frac{-9 - 3\cdot 3\cdot(-1)}{2} = 0$$

$$d_{33} = a_{33} - l_{31}^2 d_{11} - l_{32}^2 d_{22} = 17 - \alpha^2 - 0^2 \cdot 3 - 2^2 \cdot 2 = 9 - \alpha^2,$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41}d_{11}l_{31} - l_{42}d_{22}l_{32}}{d_{33}} = \frac{0 - 3\cdot 3\cdot 0 - 0\cdot 2\cdot 2}{9-\alpha^2} = 0$$

$$d_{44} = a_{44} - l_{41}^2 d_{11} - l_{42}^2 d_{22} - l_{43}^2 d_{33} = 31 - 3^2\cdot 3 - 0^2 \cdot 2 - 0^2 \cdot (9-\alpha^2) = 4,$$

$$\text{also:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9-\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) A ist positiv definit, wenn alle Diagonalelemente von D positiv sind, d. h. wenn $\alpha^2 < 9$ gilt, d. h. wenn $|\alpha| < 3$ gilt.

c) A^TA ist positiv definit, wenn $0 < x^TA^TAx = ||Ax||_2^2$ für alle $x \neq 0$ gilt, d. h. wenn $A = LDL^T$ regulär ist, d. h. (weil L stets regulär) wenn D regulär ist, d. h. wenn $\alpha^2 \neq 9$, d. h. wenn $|\alpha| \neq 3$ gilt.

d) $\det A = \det(LDL^T) = \det(D) = 3 \cdot 2 \cdot (9-\alpha^2)\cdot 4 = 24 \cdot (9 - 2^2) = 120$.

e) L (Vorwärtseinsetzen):

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ 36 \\ -24 \end{pmatrix} = b = LDL^Tx = Lz = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} z \quad \Rightarrow \quad z = \begin{pmatrix} -2 \\ 12 - (-3)\cdot(-2) = 6 \\ 36 - 0\cdot(-2) - 5\cdot 6 = 6 \\ -24 - 2\cdot(-2) - (-2)\cdot 6 - (-1)\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

D (Diagonale):
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} y = Dy = z = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L^T (Rückwärtseinsetzen):
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L^T x = y = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} -1 - 2 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1) = -2 \\ 6 - (-2) \cdot (-1) - 5 \cdot 1 = -1 \\ 2 - (-1) \cdot (-1) = 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{a,b\in\mathbb{R}}$$

Lösen Sie dieses mittels Givens-Rotationen. Bestimmen Sie anschließend die $\|\cdot\|_2$-Norm des Residuums.

b) Unabhängig von Teil a) soll nun die Funktion $y(t) := A\ln\left(\frac{t}{\tau}\right)$ im Sinne minimaler Fehlerquadrate an die Messwerte aus folgender Tabelle angepasst werden:

t_i	1	2	3	5
y_i	-1	0	1	2

.

i) Formulieren Sie diese Aufgabe als **nichtlineares** Ausgleichsproblem in Abhängigkeit der Parameter A und τ durch explizites Einsetzen aller Messwerte aus der Tabelle.

ii) Stellen Sie das lineare Ausgleichsproblem, das sich im k-ten Iterationsschritt des Gauß-Newton-Verfahrens ergeben würde, explizit auf in Abhängigkeit der Iterierten A_k und τ_k durch Einsetzen aller Messwerte aus der Tabelle.

iii) Transformieren Sie das ursprüngliche nichtlineare Ausgleichsproblem in ein äquivalentes lineares Ausgleichsproblem, und geben Sie dieses explizit an durch Einsetzen aller Messwerte aus der Tabelle. Geben Sie auch den Zusammenhang zwischen den alten Parametern (A, τ) und den neuen Parametern ($\tilde{A}$, $\tilde{\tau}$) explizit an.

Hinweis: Es gilt $\ln\left(\frac{t}{\tau}\right) = \ln(t) - \ln(\tau)$.

---

a) Die Givens-Rotationen sind anzuwenden auf

$$[F'|-F] = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Eliminiere Element $(4,1)$:
$a := 3,\ b := 4,\ r := \sqrt{a^2+b^2} = 5,\ c := a/r = 0.6,\ s := b/r = 0.8$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} 5 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1.4 & 1.4 \end{array}$$

Eliminiere Element $(4,2)$:
$a = 2,\ b = 1.4,\ r := \sqrt{a^2+b^2} = 2.441,\ c := a/r = 0.8192,\ s := b/r = 0.5735$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} 5 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 2.441 & 2.441 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Aus den ersten beiden Zeilen ergibt sich durch Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-0.2-0.2\cdot(-1)}{5} \\ \frac{2.441}{2.441} = 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Residuum ist die $\|\cdot\|_2$-Norm der letzten $m-n=4-2=2$ Zeilen der transformierten rechten Seite:

$$\text{res} = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = 2.$$

b)
i) Die i-te Zeile des Residuums lautet

$$F_i := y(t_i) - y_i = A \ln\left(\frac{t_i}{\tau}\right) - y_i.$$

Somit ergibt sich das folgende nichtlineare Ausgleichsproblem:

$$\|F\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} A\ln(\frac{1}{\tau}) + 1 \\ A\ln(\frac{2}{\tau}) - 0 \\ A\ln(\frac{3}{\tau}) - 1 \\ A\ln(\frac{5}{\tau}) - 2 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{A,\tau\in\mathbb{R}}$$

ii) Wir definieren $x := \begin{pmatrix} A \\ \tau \end{pmatrix}$, wodurch die i-te Zeile der Ableitung ($m \times n$ Jakobi-Matrix) F' lautet:

$$\begin{pmatrix} \ln\left(\frac{t_i}{\tau}\right) & -\frac{A}{\tau} \end{pmatrix}.$$

Setzen wir nun die iterierten Werte A_k, τ_k sowie die gegebenen Messwerte (t_i, y_i) in die Zeilen $(i = 1,2,3,4)$ ein, so erhalten wir für das Gauß-Newton-Verfahren das lineare Ausgleichsproblem

$$\|(F'(x^k)\Delta x^k + F(x^k)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \ln(\frac{1}{\tau_k}) & -\frac{A_k}{\tau_k} \\ \ln(\frac{2}{\tau_k}) & -\frac{A_k}{\tau_k} \\ \ln(\frac{3}{\tau_k}) & -\frac{A_k}{\tau_k} \\ \ln(\frac{5}{\tau_k}) & -\frac{A_k}{\tau_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta A_k \\ \Delta\tau_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_k\ln(\frac{1}{\tau_k}) + 1 \\ A_k\ln(\frac{2}{\tau_k}) - 0 \\ A_k\ln(\frac{3}{\tau_k}) - 1 \\ A_k\ln(\frac{5}{\tau_k}) - 2 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{\Delta A_k, \Delta\tau_k\in\mathbb{R}}$$

iii) Mit den Definitionen

$$\tilde{A} := A, \qquad \tilde{\tau} := A\ln(\tau)$$

erhält man

$$y(t_i) = A\ln\left(\frac{t_i}{\tau}\right) = \underbrace{A}_{=\tilde{A}} \ln(t_i) - \underbrace{A\ln(\tau)}_{=\tilde{\tau}} = \ln(t_i)\tilde{A} - 1\cdot\tilde{\tau}.$$

Somit ist das ursprüngliche Ausgleichsproblem äquivalent zu dem transformierten linearen Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{pmatrix} \ln(1) & -1 \\ \ln(2) & -1 \\ \ln(3) & -1 \\ \ln(5) & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{\tau} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{\tilde{A},\tilde{\tau}\in\mathbb{R}}$$

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{4} + \dfrac{(x-y)^2}{8} \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{\pi}\cos\Bigl(\pi\,\dfrac{x+y}{4}\Bigr) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y)$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0,1] \times [0,1]$ erfüllt sind. Verwenden Sie die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0.2, 0.3)$ zwei Fixpunktiterationen durch, d. h. berechnen Sie (x_2, y_2).

c) Geben Sie eine a-priori- und eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an unter Verwendung der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

d) Wie viele Iterationsschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0.2, 0.3)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon := 10^{-3}$ anzunähern?

---

a)

i) E ist abgeschlossen und konvex.

ii) Selbstabbildung: Wegen $(x,y) \in [0,1]^2$ gilt $0 \le (x-y)^2 \le 1$ und $0 \le \cos\bigl(\pi\frac{x+y}{4}\bigr) \le 1$ und damit

$$\begin{aligned} 0 \le F_1(x,y) &= \frac{y}{4} + \frac{(x-y)^2}{8} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0.375 \\ 0 \le F_2(x,y) &= \frac{x}{3} + \frac{1}{\pi}\cos\Bigl(\pi\frac{x+y}{4}\Bigr) \le \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi} \le 0.66 \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also $F(E) \subset \widetilde{E} := [0, 0.375] \times [0, 0.66] \subset E \Rightarrow F$ ist selbstabbildend auf $\widetilde{E} \subset E$.

iii) Kontraktivität: Da E konvex ist, dürfen wir die Ableitung benutzen. Als Jacobi-Matrix ergibt sich

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x-y}{4} & \dfrac{1}{4} - \dfrac{x-y}{4} \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\sin\Bigl(\pi\dfrac{x+y}{4}\Bigr) & -\dfrac{1}{4}\sin\Bigl(\pi\dfrac{x+y}{4}\Bigr) \end{pmatrix}.$$

Wegen $(x,y) \in E = [0,1]^2$ gilt $|\frac{x-y}{4}| \le \frac{1}{4}$ sowie $|\frac{1}{4} - \frac{x-y}{4}| \le \frac{1}{2}$ und $\sin\bigl(\pi\,\frac{x+y}{4}\bigr) \ge 0$, so dass wir durch elementweise Betragsabschätzung (zulässig in der $\|\cdot\|_1$- und $\|\cdot\|_\infty$-Norm, nicht jedoch in der $\|\cdot\|_2$-Norm) erhalten:

$$\|F'(x,y)\|_\infty \le \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\Bigl\{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,,\, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Bigr\} = \max\Bigl\{\frac{3}{4}\,,\, \frac{7}{12}\Bigr\} = \frac{3}{4} =: L < 1,$$

d. h. F ist kontraktiv auf E. Somit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Bemerkung: In $\widetilde{E} = [0, 0.375] \times [0, 0.66]$ gilt $|\frac{x-y}{4}| \le \frac{0.66}{4} = 0.165$ sowie $|\frac{1}{4} - \frac{x-y}{4}| \le \frac{1+0.66}{4} = 0.415$ und $\bigl|-\frac{1}{4}\sin\bigl(\pi\,\frac{x+y}{4}\bigr)\bigr| \le \frac{1}{4}\sin\bigl(\pi\,\frac{0.375+0.66}{4}\bigr) = 0.1816$, und man erhält $\max_{x,y\in\widetilde{E}} ||F'(x,y)||_\infty \le \max\Bigl\{0.165 + 0.415\,,\, \frac{1}{3} + 0.1816\Bigr\} = \max\{0.58\,,\, 0.5149\} = 0.58 =: \widetilde{L} < 1$, d. h. durch die kluge Wahl von $\widetilde{E}$ statt E erhält man eine erheblich bessere Kontraktionskonstante.

b)

$$\text{Startwert:} \qquad x^0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\text{1. Schritt:} \qquad x^1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.3}{4} + \frac{0.1^2}{8} \\ \frac{0.2}{3} + \frac{1}{\pi}\cos\bigl(\pi\,\frac{0.2+0.3}{4}\bigr) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.07625 \\ 0.36075 \end{pmatrix}, \qquad x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} -0.12375 \\ 0.06075 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: $\quad x^2 := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.36075}{4} + \frac{(0.07625-0.36075)^2}{8} \\ \frac{0.07625}{3} + \frac{1}{\pi}\cos\left(\pi\,\frac{0.07625+0.36075}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1003 \\ 0.3252 \end{pmatrix}, \qquad x^2 - x^1 = \begin{pmatrix} 0.02406 \\ -0.03559 \end{pmatrix}$

c) Es gilt $\|x^1 - x^0\|_\infty = 0.1238$ und somit gemäß a-priori-Abschätzung

$$\|x^2 - x^*\|_\infty \le \frac{L^2}{1-L}\,\|x^1 - x^0\|_\infty = \frac{(\frac{3}{4})^2}{1-\frac{3}{4}} \cdot 0.1238 = \frac{9}{4} \cdot 0.1238 = 0.2786.$$

Es gilt $\|x^2 - x^1\|_\infty = 0.03559$ und somit gemäß a-posteriori-Abschätzung

$$\|x^2 - x^*\|_\infty \le \frac{L}{1-L}\,\|x^2 - x^1\|_\infty = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} \cdot 0.03559 = 3 \cdot 0.03559 = 0.1068.$$

Bemerkung: Mit $\widetilde{L}$ folgt a-priori $\|x^2 - x^*\|_\infty \le 0.09916$ und a-posteriori $\|x^2 - x^*\|_\infty \le 0.04915$.

d) Es gilt gemäß a-priori-Abschätzung

$$n \ge \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^1-x^0\|}}{\ln L} = \frac{\ln \frac{10^{-3}/4}{0.1238}}{\ln \frac{3}{4}} = 21.57.$$

Es sind also höchstens $n = 22$ Schritte erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon := 10^{-3}$ zu erreichen.

Bemerkung: Mit $\widetilde{L}$ folgt $n \ge 10.44$, d. h. in Wahrheit reichen sogar schon $n = 11$ Schritte.

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(t) - ty'(t) + 4t^2 y(t) = 0, \qquad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2.$$

a) Formulieren Sie das äquivalente System erster Ordnung.

b) Bestimmen Sie eine Näherung für $y''(5/4)$, indem Sie einen Schritt mit dem verbesserten Eulerverfahren durchführen.

c) Bestimmen Sie eine Näherung für $y''(9/8)$, indem Sie einen Schritt mit der (impliziten) Trapezmethode durchführen. Lösen Sie das sich dabei ergebende lineare Gleichungssystem mit einer Gauß-Elimination.

---

a) Umformen in System erster Ordnung:

$$\begin{array}{c} y_1 := y, \quad y_2 := y' = y_1' \\ ty' - 4t^2 y = ty_2 - 4t^2 y_1 = y'' = y_2' \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ ty_2 - 4t^2 y_1 \end{pmatrix} =: f(t,y), \qquad \begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =: y^0$$

b) verbessertes Eulerverfahren (explizit): Ein Schritt, $t_0 = 1$, $t_1 = \frac{5}{4}$, $h = t_1 - t_0 = \frac{1}{4}$,:

$$k_1 := f(t_0, y^0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1^2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$y^1 := y^0 + hf\Big(t_0 + \frac{h}{2}, y^0 + \frac{h}{2} k_1\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} f\Big(9/8, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} f\Big(9/8, \begin{pmatrix} 5/4 \\ 7/4 \end{pmatrix}\Big)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{9}{8} \cdot \frac{7}{4} - 4 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{16} \\ \frac{233}{256} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.438 \\ 0.9102 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y(5/4) \\ y'(5/4) \end{pmatrix}$$

Einsetzen in Differentialgleichung: $y''(t) = ty'(t) - 4t^2 y(t)$

$$y''(5/4) = \frac{5}{4} \cdot y'(5/4) - 4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot y(5/4) \approx \frac{5}{4}\left(\frac{233}{256}\right) - 4 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot \frac{23}{16} = -\frac{8035}{1024} = -7.847\,.$$

c) Trapezmethode (implizit):

$$y^{j+1} := y^j + \frac{h}{2}\big[f(t_j, y^j) + f(t_{j+1}, y^{j+1})\big] = y^j + \frac{h}{2}\begin{pmatrix} y_2^j \\ t_j y_2^j - 4t_j^2 y_1^j \end{pmatrix} + \frac{h}{2}\begin{pmatrix} y_2^{j+1} \\ t_{j+1} y_2^{j+1} - 4t_{j+1}^2 y_1^{j+1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{h}{2} \\ 2ht_{j+1}^2 & 1 - \frac{h}{2} t_{j+1} \end{pmatrix} y^{j+1} = y^j + \frac{h}{2}\begin{pmatrix} y_2^j \\ t_j y_2^j - 4t_j^2 y_1^j \end{pmatrix}$$

Ein Schritt: $j = 0$, $t_j = t_0 = 1$, $t_{j+1} = t_1 = \frac{9}{8}$, $h = t_1 - t_0 = \frac{1}{8}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{16} \\ 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 & 1 - \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{8} \end{pmatrix} y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1^2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \text{System:} \quad \begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{16} & \frac{9}{8} \\ \frac{81}{256} & \frac{119}{128} & \frac{15}{8} \end{array} \quad \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{16} & \frac{9}{8} \\ 0 & \frac{3889}{4096} & \frac{3111}{2048} \end{array} \Rightarrow y^1 = \begin{pmatrix} \frac{4764}{3889} \\ \frac{6222}{3889} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.225 \\ 1.600 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y(9/8) \\ y'(9/8) \end{pmatrix}$$

Einsetzen in Differentialgleichung: $y''(t) = ty'(t) - 4t^2 y(t)$

$$y''(9/8) = \frac{9}{8} \cdot y'(9/8) - 4 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot y(9/8) \approx \frac{9}{8} \cdot \frac{6222}{3889} - 4 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \frac{4764}{3889} = -\frac{17118}{3889} = -4.402\,.$$