RWTH–Aachen **Institut für Geometrie und Praktische Mathematik**

Multiple-Choice-Test – NumaMB F08 (30 Punkte)

Bei jeder MC-Aufgabe ist **mindestens eine Aussage korrekt**. Wird dennoch bei einer MC-Aufgabe keine einzige Aussage angekreuzt, gilt diese Aufgabe als **nicht bearbeitet** und wird mit **0 Punkten** bewertet.

Ansonsten gibt es für **jede falsche Antwort −0.5 Punkte**, und für **jede korrekte Antwort 0.5 Punkte**, so dass man pro MC-Aufgabe −2 bis 2 Punkte erreichen kann. Da aus dem MC-Test als Ganzes keine negativen Punkte entstehen dürfen, kann man bei 15 MC-Aufgaben **insgesamt zwischen 0 und 30 Punkten** erreichen.

Um Flüchtigkeitsfehlern vorzubeugen, sind **durchgängig nur korrekte Aussagen anzukreuzen**.

MC 1. Es sei $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Menge der Maschinenzahlen mit Basis $b \in \mathbb{N}$, Mantissenlänge $m \in \mathbb{N}$, Exponent $e \in \mathbb{Z}$ mit $r \leq e \leq R$, und relativer Maschinengenauigkeit eps $:= \frac{b^{1-m}}{2}$. Ferner seien x_{MIN} die kleinste und x_{MAX} die größte Maschinenzahl sowie $\text{fl} : [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}] \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundungsabbildung. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $|\text{fl}(x) - x| \leq \text{eps}$ für alle $x \in [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$.
- ⊗ $\left|\frac{\text{fl}(x)-x}{x}\right| \leq \text{eps}$ für alle $x \in [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$, $x \neq 0$.
- ⊗ Für jedes $x \in [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$ existiert eine Zahl ε mit $|\varepsilon| \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = (1+\varepsilon)x$.
- ◯ Für jedes $x \in [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$ existiert eine Zahl ε mit $|\varepsilon| \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x + \varepsilon$.

MC 2. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Die Multiplikation zweier von Null verschiedener Zahlen ist stets gut konditioniert.
- ◯ Die Konditionszahl einer Funktion ist stets größer als 1.
- ◯ Eine gute Kondition eines Problems induziert eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Lösungsverfahren.
- ⊗ Die Funktion $f(x,y) := x + y$ ist gut konditioniert für alle $x > 0, y > 0$.

MC 3. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(A) \neq 0$, und $\kappa_2(A)$ bezeichne die Konditionszahl der Matrix A bezüglich der Euklidischen Norm. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ $\kappa_2(A) \geq 1$.
- ⊗ $\kappa_2(\alpha A) = \kappa_2(A)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.
- ◯ $\kappa_2(A^{-1}) = \kappa_2(A)^{-1}$.
- ⊗ $\kappa_2(A) = 1$ falls A orthogonal ist.

MC 4. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Ist $\det(A) \neq 0$, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.
- ⊗ Ist A symmetrisch positiv definit, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.
- ⊗ Es sei P eine Permutationsmatrix, L eine normierte untere Dreiecksmatrix und R eine oberere Dreiecksmatrix, so dass $PA = LR$. Dann gilt $|\det(A)| = |\det(R)|$.
- ◯ $||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\right|$.

MC 5. Es seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix, $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix und $A = Q\,R$. Ferner bezeichne $\kappa_2(A)$ die Konditionszahl der Matrix A bezüglich der Euklidischen Norm. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Ist $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, so gilt $A^{-1} = R^T Q^T$.
- ⊗ Ist $m = n$ und $\det(A) \neq 0$, so gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$.
- ◯ Nicht alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ besitzen eine QR-Zerlegung.
- ◯ Eine QR-Zerlegung kann man stets auf stabile Weise mittels Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmen.

MC 6. Es sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Householder-Transformation und $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Q = I - \frac{vv^T}{v^Tv}$.
- ⊗ Es gilt stets $||Q||_2 = 1$.
- ⊗ Es gilt stets $Q = Q^T$.
- ⊗ Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^Tv = 0$ gilt: $Qy = y$.

MC 7. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Alle Eigenwerte von A^TA sind größer als 0.
- ⊗ Wenn alle Spalten von A linear unabhängig sind, dann ist A^TA symmetrisch positiv definit.
- ⊗ Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist AA^T symmetrisch positiv definit.
- ⊗ Wenn alle Zeilen von A linear unabhängig sind, dann ist AA^T invertierbar.

MC 8. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Der Aufwand zur Berechnung von A^TA ist proportional zu $m^2\,n$.
- ⊗ Der Aufwand zur Berechnung von A^TA ist proportional zu $n^2\,m$.
- ⊗ Der Aufwand zur Berechnung von A^TA ist stets größer als der zum Lösen der Normalgleichungen.
- ◯ Zur Lösung der Normalgleichungen verwendet man das Cholesky-Verfahren, weil das Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen bei der $L\,D\,L^T$-Zerlegung ungefähr halb soviele Operationen benötigt wie das bei einer $L\,R$-Zerlegung.

MC 9. Mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$ gelöst werden. Hierbei habe die Matrix A den Rang n, die Cholesky-Zerlegung $A^TA = LDL^T$ und die Lösung des Problems wird mit x^* bezeichnet. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Es gilt $L^Tx^* = D^{-1}y$, wobei y die Lösung der Gleichung $Ly = b$ ist.
- ⊗ Die Normalgleichungen lassen sich immer mit Gauß-Elimination ohne Pivotisierung lösen.
- ⊗ Wenn die Spalten von A orthonormal sind, dann ist x^* auch die Lösung von $\|x - A^T\,b\|_2 \to \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}$.
- ⊗ Es gilt stets $\|LDL^Tx^* - A^Tb\|_2 = 0$.

MC 10. Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- ◯ Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1 und maximal 2.
- ⊗ Falls $\|\Phi'(x^*)\|_2 < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\|x_0 - x^*\|_2$ hinreichend klein.
- ◯ $\|\Phi'(x^*)\|_2 > 1$ ist hinreichend dafür, dass kein $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$ existiert.
- ⊗ Das Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.

MC 11. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Wenn $f(a) \geq 0$ und $f(b) \leq 0$ gilt, dann existiert in $[a, b]$ genau eine Nullstelle von f.
- ○ Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ gilt, dann existiert in $[a, b]$ genau eine Nullstelle von f.
- ⊗ Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt und $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann bilden die Iterationswerte des Newton-Verfahrens zu $x_0 = a$ eine monoton steigende Folge.
- ○ Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ gilt und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann liefert das Newton-Verfahrens zum Startwert $x_0 = (a + b)/2$ die in $[a, b]$ eindeutige Nullstelle $f(x^*) = 0$.

MC 12.

Das Nullstellenproblem $f(x) = 0$ mit Nullstelle x^* soll iterativ gelöst werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Das gedämpfte Newton-Verfahren benötigt zwar stets mehr Iterationen als das (normale) Newton-Verfahren, konvergiert dafür aber für eine größere Menge von Startwerten.
- ⊗ Beim Newton-Verfahren ist x^{k+1} die Nullstelle der linearen Näherung an die Funktion f im Punkt x^k.
- ⊗ Wenn $f'(x^*)$ regulär ist, so existiert auch eine Fixpunktiteration, mit der man die Nullstelle x^* von f berechnen kann und die für alle Startwerte, die hinreichend nahe bei x^* liegen, quadratisch konvergiert.
- ⊗ Wenn $f'(x^*)$ regulär ist, so konvergiert das Newton-Verfahren quadratisch für alle Startwerte, die hinreichend nahe bei x^* liegen.

MC 13. Mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und $0 \leq j \leq k \leq n$ sei $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]f$ eine dividierte Differenz von $f \in C^{(n)}(\mathbb{R})$, und $p_n(x)$ das Newton-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]f = \frac{f^{(k-j)}(\xi)}{(k-j)!}$ mit $\xi \in [x_j, x_k]$.
- ○ $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]f = 0$ falls f ein Polynom vom Grade $\leq (k - j)$ ist.
- ○ Es gilt stets $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]p_n = 0$.
- ⊗ Wegen $p_n(x_j) = f(x_j)\ \forall j = 0, \ldots, n$ gilt stets $[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]f = [x_j, x_{j+1}, \ldots, x_k]p_n$.

MC 14. Mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und $f \in C^{(n+1)}(\mathbb{R})$ sei $p_n(x)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Das Lagrange-Interpolationspolynom $p_n(x)$ ist stets identisch mit dem Newton-Interpolationspolynom zu denselben Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.
- ⊗ Das Neville-Aitken Schema dient dazu, das Lagrange-Interpolationspolynom punktweise auszuwerten.
- ⊗ Zur nachträglichen Hinzunahme einer zusätzlichen Stützstelle muss ein bereits berechnetes Neville-Aitken-Schema lediglich um eine zusätzliche Diagonale ergänzt werden.
- ○ Mit $a < x_0$ und $x_n < b$ sowie $x \in [a, b]$ gilt stets $|f(x) - p_n(x)| \leq \left|\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\right| \max_{\xi \in [x_0, x_n]} \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}$

MC 15. Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch geeignete Quadraturformeln. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Der Fehler der Mittelpunktsregel ist stets genau halb so groß wie der Fehler der Trapezregel.
- ○ Die Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.
- ○ Die summierte Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.
- ⊗ Die Simpsonregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 3 ist.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & 7 & 27 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mithilfe der Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$, ob A positiv definit ist. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an.
(Berechnung über LR-Zerlegung gibt 0 Punkte!)

b) Es sei nun

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A := LDL^T.$$

Geben Sie alle Werte von α, β an, für die das Produkt AA symmetrisch positiv definit ist.

c) Es sei nun $\alpha = 3$, $\beta = 2$ sowie

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -20 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der Matrizen L und D aus Teil b).
(Berechnung über LR-Zerlegung gibt 0 Punkte!)

a) Cholesky-Zerlegung:

$$d_{11} = a_{11} = 1, \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = \frac{0}{1} = 0, \qquad l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = \frac{-2}{1} = -2, \qquad l_{41} = \frac{a_{41}}{d_{11}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = 2 - 0^2 \cdot 1 = 2, \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}d_{11}l_{21}}{d_{22}} = \frac{0 - (-2) \cdot 1 \cdot 0}{2} = 0,$$

$$l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}d_{11}l_{21}}{d_{22}} = \frac{0 - 1 \cdot 1 \cdot 0}{2} = 0$$

$$d_{33} = a_{33} - l_{31}^2 d_{11} - l_{32}^2 d_{22} = 7 - (-2)^2 \cdot 1 - 0^2 \cdot 2 = 3,$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41}d_{11}l_{31} - l_{42}d_{22}l_{32}}{d_{33}} = \frac{7 - 1 \cdot 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 \cdot 0}{3} = 3$$

$$d_{44} = a_{44} - l_{41}^2 d_{11} - l_{42}^2 d_{22} - l_{43}^2 d_{33} = 27 - 1^2 \cdot 1 - 0^2 \cdot 2 - 3^2 \cdot 3 = -1,$$

$$\text{also:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A ist nicht positiv definit, da nicht alle Diagonalelemente von D positiv sind.

b) $AA = A^TA$ ist positiv definit, wenn $0 < x^TA^TAx = ||Ax||_2^2$ für alle $x \neq 0$ gilt, d. h. wenn $A = LDL^T$ regulär ist, d. h. (weil L stets regulär $\forall \alpha \in \mathbb{R}$) wenn D regulär ist, d. h. wenn alle Diagonaleinträge von D ungleich Null sind, d. h. wenn $\beta \neq 0$ gilt.
Also: AA ist symmetrisch positiv definit $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta \neq 0$.

c) L (Vorwärtseinsetzen):

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -20 \\ 18 \end{pmatrix} = b = LDL^T x = Lz = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} z \quad \Rightarrow \quad z = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -20 - 3 \cdot (-6) \\ 18 - 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

D (Diagonale): $$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = Dy = z = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

L^T (Rückwärtseinsetzen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L^T x = y = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 2 - 2 \cdot 2 = -2 \\ -2 - 3 \cdot (-1) = 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Gegeben seien Meßwerte

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & 0.2 & 0.4 & 0.5 \\ \hline f_i & 0.3 & -0.8 & -1 \end{array} \quad ,$$

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = \sin(\omega t + \phi)$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$ explizit auf (Meßwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß–Newton–Verfahren seien die Startwerte $\omega_0 = 6$, $\phi_0 = 1.5$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? (Der erste Schritt muss nicht durchgeführt werden.)

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Transformationen. Geben Sie x und das Residuum explizit an.

Teil a)

Die i-te Zeile der zu minimierenden Funktion $F(\omega, \phi)$ lautet:

$$F_i := f(t_i) - f_i = \sin(\omega\, t_i + \phi) - f_i (= r_i).$$

Somit haben wir $||F(x)||_2 \to \min$ mit

$$F(x) = F(\omega, \phi) = \begin{pmatrix} \sin(0.2\,\omega + \phi) - 0.3 \\ \sin(0.4\,\omega + \phi) + 0.8 \\ \sin(0.5\,\omega + \phi) + 1.0 \end{pmatrix}$$

Teil b)

Die i-te Zeile von der Jakobimatrix J und rechten Seite $-r$ (Residuum):

$$(\; t_i \cdot \cos(t_i \cdot \omega + \phi) \qquad \cos(t_i\, \omega + \phi) \;\;|\;\; f_i - \sin(\omega\, t_i + \phi) \;)$$

Bem.: In der erstem Spalte steht hier also jeweils das t_i-fache der zweiten!

Nun setzen wir für ω $\omega_0 = 6$ und für ϕ $\phi_0 = 1.5$ ein:

$$(J| - r) = \begin{pmatrix} -0.180814 & -0.904072 & | & -0.12738 \\ -0.290373 & -0.725932 & | & -0.112234 \\ -0.105398 & -0.210796 & | & -0.0224699 \end{pmatrix}$$

Das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt lautet also:

$$\left\| J \cdot \begin{pmatrix} \Delta\omega_0 \\ \Delta\phi_0 \end{pmatrix} - (-r) \right\|_2 \to \min$$

Teil c)

Es ist

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & | & 2 \\ 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & | & 3 \\ 4 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen für y die erste Spalte von A und erkennen, dass die zweite Spalte von A mit b übereinstimmt, d.h. bereits jetzt kann man erkennen:
Das Residuum ist 0 und die Lösung lautet $x = (0,1)^T$, denn:
$(A|b) \to (R|\tilde{b})$ mit $\tilde{b}_3 = r_{32} = \tilde{b}_4 = r_{42} = 0$ und $\tilde{b}_3 = r_{22} \to x_2 = 1$ sowie $\tilde{b}_1 = r_{12} \to x_1 = 0$.

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \to \sigma = \|y\|_2 = 25,\ \alpha = \operatorname{sign}(y_1)\sqrt{\sigma} = 5 \overset{v_1 = y_1 + \alpha}{\longrightarrow} v = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \to \beta = \frac{2}{v^T v} = \frac{1}{35}$$

Mit $h = \beta\, v^T b = 1/35\,(7\ 1\ 2\ 4)\,(2\ 1\ 3\ 0)^T = 21/35 = 3/5$ brauchen wir für die erste Transformation nur $b - h\,v$ zu berechnen:

$$b - h\,v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix} \qquad \left(= (R\|\tilde{b})\right).$$

Und somit

$$(A|b) \to \left(A^{(1)}|b^{(1)}\right) \begin{pmatrix} -5 & -\frac{11}{5} & | & -\frac{11}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & | & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{9}{5} & | & \frac{9}{5} \\ 0 & -\frac{12}{5} & | & -\frac{12}{5} \end{pmatrix} \qquad \left(a_{11}^{(1)} = -\alpha\right).$$

Für den zweiten Schritt brauchen wir nur

$$-\alpha = -\operatorname{sign}\left(\frac{2}{5}\right) \left\| \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} \\ \frac{-12}{5} \end{pmatrix} \right\|_2 = -\frac{\sqrt{5 + 81 + 144}}{5} = -\frac{\sqrt{229}}{5} = -3.026549190$$

zu berechnen. Daraus folgt:

$$\left(A^{(1)}|b^{(1)}\right) \to \begin{pmatrix} -5 & -\frac{11}{5} & | & -\frac{11}{5} \\ 0 & -\frac{\sqrt{229}}{5} & | & -\frac{\sqrt{229}}{5} \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Rückwärtseinsetzen liefert $x = (0,1)^T$ und das Residuum ist 0.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} + y^2 - 9 &= 0 \\ x\,y + \frac{3}{2}\,x - \frac{7}{2} &= 0 \end{aligned}$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage der Lösung(en) im 1. Quadranten verdeutlicht. Bestimmen Sie einen *guten* ganzzahligen Bereich $[x_u, x_o] \times [y_u, y_o]$, in dem eine Lösung liegt.

b) Geben Sie für die in a) fixierte Lösung eine geeignete 2D-Fixpunktgleichung an, und weisen Sie hierfür die Voraussetzungen des Fixpunksatzes von Banach nach. Begründen Sie Ihre Aussagen.

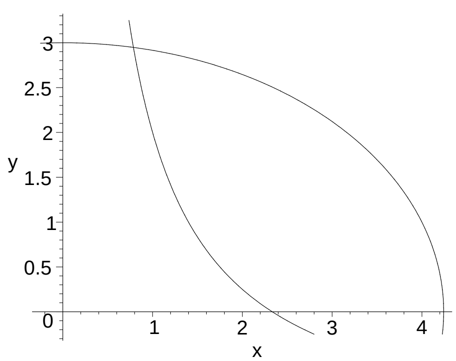
c) Eine weitere Lösung liegt in $[4,5] \times [-1,0]$. Für diese ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{18 - 2\,y^2} \\ \dfrac{7 - 3\,x}{2\,x} \end{pmatrix}$$

eine geeignete Fixpunktiteration mit Kontraktionszahl (bez. der ∞-Norm) $L = 0.5$. Wieviele Schritte sind ausgehend von dem ganzzahligen Startwert $(x_0, y_0) = (4, -1)$ höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-6}$ zu erzielen.

zu a)

Skizze (Ellipse in Normallage mit Hauptachsen $a = \sqrt{18} \approx 4.34$ und $b = 3$, $y(x) = \dfrac{7 - 3\,x}{2\,x}$ mit Polstelle $x = 0$, Nullstelle $x = \frac{7}{3}$ (Asymptote $y = -\frac{3}{2}$) sowie dem Funktionswert an der Stelle $x = 1$ $(y = 2)$):



Dert Fixpunkt im 1. Quadranten liegt ungefähr bei $(0.7, 3.0)$. Der geforderte *ganzzahlige* Bereich ist also $D = [0,1] \times [2,3]$.

zu b)

Wir lösen die erste Gleichung nach y und die zweite Gleichung nach x auf (Auflösung nach y führt gem. Skizze auf eine Steigung < -1):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{2\,y+3} \\ \sqrt{9 - \frac{x^2}{2}} \end{pmatrix} =: F(x,y) \rightarrow F'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-14}{(2\,y+3)^2} \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{9 - \frac{x^2}{2}}} & 0 \end{pmatrix}$$

D ist abgeschlossen.

Abb. in sich:

Obige Ableitung zeigt: Die erste Komponente ist für $y \in \mathbb{R}\backslash\{-3/2\}$ und die zweite für $x \in [0, \sqrt{18}]$ (streng) monoton fallend. Also: $f(D) = [7/9, 1] \times [\sqrt{17/2}, 3] = [0.\overline{7}, 1] \times [2.915475948, 3] \subset D$

kontraktiv:
Da $(1,3)$ als Startwert gewählt wird und dieser in $f(D)$ liegt, könnten wir für die Kontraktivität bereits eine Einschränkung auf $D' = f(D)$ machen. Dieses Gebiet ist ebenfalls konvex (und abgeschlossen). Da zudem F stetig differenzierbar ist, dürfen wir die Kontaktivität mit F' zeigen. Für die Norm von F' auf D (D') erhalten wir die maximalen Einträge

$$\frac{14}{(2\cdot 2+3)^2} = \frac{14}{49} = 0.2857142857 \qquad \left(\frac{14}{(2\sqrt{\frac{17}{2}}+3)^2} = \frac{14}{(\sqrt{34}+3)^2} = 0.1795200653\right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{9-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{34}} = 0.1714985852$$

Damit ist F auch kontraktiv auf D mit (z.B.) $\alpha = 0.3$. ($\alpha = 0.18$ für D'.)

zu c)
Jetzt

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{18-2\,y^2} \\ \dfrac{7-3\,x}{2\,x} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (4,-1) \to \mathbf{x}_1 = (4, -0.625) \to \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = (0, 0.375)$$

$$\varepsilon = 2\cdot 10^{-6} \to n \geq \frac{\ln \dfrac{\varepsilon(1-L)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_\infty}}{\ln L} = 18.5...$$

Also bringen 19 Schritte mit Sicherheit die geforderte Genauigkeit.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	3	1	0	-1

a) Berechnen Sie alle drei fehlenden Werte $P_{i,k}$ in dem folgenden Neville-Aitken-Schema, das dazu dient, das zugehörige Interpolationspolynom $p_4(x)$ vierten Grades an der Stelle $x = 2.5$ auszuwerten. Geben Sie $p_4(2.5)$ explizit an (sonst Punktabzug!).

$$
\begin{array}{r|llllllllll}
x_0 = 1 & 2 & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & \\
x_1 = 2 & 3 & \rightarrow & 3.5 & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_2 = 3 & 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 2.375 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_3 = 4 & 0 & \rightarrow & 1.5 & \rightarrow & \boxed{P_{3,2}} & \rightarrow & 2.125 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_4 = 5 & -1 & \rightarrow & \boxed{P_{4,1}} & \rightarrow & 1.5 & \rightarrow & 1.8125 & \rightarrow & \boxed{P_{4,4}}
\end{array}
$$

b) Geben Sie eine möglichst scharfe Abschätzung für den maximalen Fehler $|p_4(x) - y(x)|$ im **Intervall** $[1, 5]$ an.
Hinweis: Für die Ableitungen von y gelte $|y^{(n)}(x)| \leq 2^{n/2}\ \forall n \in \mathbb{N}$, und das Knotenpolynom nimmt sein Betragsmaximum an den Stellen $x = 1.3556$ bzw. 4.6444 an.

a) Neville-Aitken-Schema $\left(P_{i,k} = P_{i,k-1} + (x - x_i)\frac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}}\right)$

$$
\begin{array}{r|llllllllll}
x_0 = 1 & 2 & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & \\
x_1 = 2 & 3 & \rightarrow & 3.5 & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_2 = 3 & 1 & \rightarrow & 2 & \rightarrow & 2.375 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_3 = 4 & 0 & \rightarrow & 1.5 & \rightarrow & \boxed{1.875} & \rightarrow & 2.125 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_4 = 5 & -1 & \rightarrow & \boxed{1.5} & \rightarrow & 1.5 & \rightarrow & 1.8125 & \rightarrow & \boxed{2.0078}
\end{array}
$$

b) Da das Knotenpolynom an beiden gegebenen Extremwertstellen 1.3556 bzw. 4.6444 dasselbe Betragsmaximum annimmt, muss man sich nur für eine der beiden Extremwertstellen entscheiden (z. B. 1.3556) und diesen Wert in die Fehlerformel einsetzen, um eine scharfe Abschätzung zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
\max_{x\in[1,5]} |p_4(x) - y(x)| &\leq \max_{x\in[1,5]} |x-1| \cdot |x-2| \cdot |x-3| \cdot |x-4| \cdot |x-5| \, \frac{1}{5!} \max_{\xi\in[1,5]} |y^{(5)}(\xi)| \\
&\leq |1.3556-1| \cdot |1.3556-2| \cdot |1.3556-3| \cdot |1.3556-4| \cdot |1.3556-5| \cdot \frac{2^{5/2}}{120} \\
&= 3.631432208 \cdot \frac{5.6569}{120} = 0.1712
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Eine unnötig grobe Abschätzung erhält man durch Einsetzen der jeweils weiter entfernten Extremwertstelle ($|4.6444-1| \cdot |4.6444-2| \cdot |4.6444-3| \cdot |1.3556-4| \cdot |1.3556-5|$).

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Das Integral

$$I := \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \qquad \text{mit} \quad f(x) := \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+0.5}$$

soll numerisch approximiert werden.
Hinweis: Für die Ableitungen des Integranden $f(x)$ gilt $|f'(x)| \leq 2$, $|f''(x)| \leq 7.424$, $|f'''(x)| \leq 22$, $|f^{(4)}(x)| \leq 184.2$, $|f^{(5)}(x)| \leq 930.9$, $\forall x \in [0,2]$.

a) Bestimmen Sie I näherungsweise mit der Simpsonregel mit der Schrittweite $h := 2$ und schätzen Sie den Fehler ab.

b) Bestimmen Sie I näherungsweise mit der summierten Mittelpunktsregel mit der Schrittweite $h := \frac{1}{2}$ und schätzen Sie den Fehler ab.

c) Welches der beiden Verfahren (Simpsonregel bzw. summierte Mittelpunktsregel) benötigt weniger Punktauswertungen von f, um einen Fehler von weniger als 0.07 garantieren zu können?
Hinweis: Bestimmen Sie mithilfe der Fehlerformel zunächst die jeweils notwendige Anzahl von Schritten, und daraus dann die Anzahl der Funktionsauswertungen (n Schritte der summierten Simpsonregel benötigen $2n+1$ Funktionsauswertungen).

a) Die Intervallgrenzen und Schrittweite $h = 2$ sind vorgegeben $\to n = \frac{2-0}{2} = 1$ Schritt mit der Simpson-Regel (Gewichte $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{1}{6}$):

$$I_2 = 2\left(\frac{1}{6}\,\frac{\mathrm{e}^0}{0^2+0.5} + \frac{4}{6}\,\frac{\mathrm{e}^1}{1^2+0.5} + \frac{1}{6}\,\frac{\mathrm{e}^2}{2^2+0.5}\right) = 3.6303.$$

Fehlerabschätzung:

$$|I - I_2| \leq \frac{(2-0)^5}{2880n^4} \max_{x\in[0,2]}\left|f^{(4)}(x)\right| \left(\overset{\text{auch}}{=} \frac{2^4}{2880}(2-0) \max_{x\in[0,2]}\left|f^{(4)}(x)\right|\right) \overset{\text{Hinweis}}{\leq} \frac{32}{2880}\cdot 184.2 = 2.047.$$

b) Die Intervallgrenzen und Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ sind vorgegeben $\to n = \frac{2-0}{1/2} = 4$ Schritte mit der Mittelpunktsregel (Gewicht 1):

$$SI_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{0.25}}{0.25^2+0.5} + \frac{\mathrm{e}^{0.75}}{0.75^2+0.5} + \frac{\mathrm{e}^{1.25}}{1.25^2+0.5} + \frac{\mathrm{e}^{1.75}}{1.75^2+0.5}\right) = 3.791.$$

Fehlerabschätzung:

$$|I - SI_1| \leq \frac{(2-0)^3}{24n^2} \max_{x\in[1,3]}\left|f^{(2)}(x)\right| \overset{\text{Hinweis}}{\leq} \frac{7.424}{48} = 0.1547.$$

c) Vorab: Jetzt werden die Regeln und eine Mindestgenauigkeit vorgegeben. Diese kann man nur erzielen, indem die Regeln wiederholt (summiert) werden (es sei denn man erhält $n = 1$ wie in a)).

Um mit der Mittelpunktsregel einen Fehler $|I - SI_1| \leq \frac{(2-0)^3}{24n^2} \max_{x\in[1,3]}\left|f^{(2)}(x)\right| \overset{!}{\leq} \varepsilon := 0.07$ garantieren zu können, sind

$$n \geq \left(\frac{(2-0)^3}{24\varepsilon} \max_{x\in[0,2]}\left|f^2(x)\right|\right)^{1/2} = \left(\frac{8}{24\cdot 0.07}\cdot 7.424\right)^{1/2} = 5.95,$$

d. h. $n \geq 6$ Schritte erforderlich, was auch $n \geq 6$ Funktionsauswertungen entspricht, da bei der Mittelpunktsregel nur eine Funktionsauswertung pro Schritt erfolgt.

Um mit der Simpsonregel einen Fehler $|I - SI_2| \leq \frac{(2-0)^5}{2880n^4} \max_{x\in[1,3]}\left|f^{(4)}(x)\right| \overset{!}{\leq} \varepsilon := 0.07$ garantieren zu können, sind

$$n \geq \left(\frac{(2-0)^5}{2880\varepsilon} \max_{x\in[0,2]}\left|f^4(x)\right|\right)^{1/2} = \left(\frac{32}{2880\cdot 0.07}\cdot 184.2\right)^{1/4} = 2.33,$$

d. h. $n \geq 3$ Schritte erforderlich, was $2n + 1 \geq 7$ Punktauswertungen von f entspricht.
Somit benötigt hier die summierte Mittelpunktsregel weniger Punktauswertungen als die summierte Simpsonregel, um einen Fehler von weniger als 0.07 sicher garantieren zu können.