Multiple-Choice-Test (30 Punkte)

Bei jeder MC-Aufgabe ist **mindestens eine Aussage korrekt**. Wird dennoch bei einer MC-Aufgabe keine einzige Aussage angekreuzt, gilt diese Aufgabe als **nicht bearbeitet** und wird mit **0 Punkten** bewertet.

Ansonsten gibt es für **jede falsche Antwort -0.5 Punkte**, und für **jede korrekte Antwort 0.5 Punkte**, so dass man pro MC-Aufgabe -2 bis 2 Punkte erreichen kann. Da aus dem MC-Test als Ganzes keine negativen Punkte entstehen dürfen, kann man bei 15 MC-Aufgaben **insgesamt zwischen 0 und 30 Punkten** erreichen.

Um Flüchtigkeitsfehlern vorzubeugen, sind **durchgängig nur korrekte Aussagen anzukreuzen**.

Original

MC 1. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) := \big(x^3-1\big)\sin y$, die an verschiedenen Stellen (x,y) ausgewertet werden soll. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ f ist in der Nähe von $(0,0)$ gut konditioniert.
- ⊗ f ist für alle $(x,y) \in [-0.5,0.5]\times[-1,1]\backslash\{(0,0)\}$ gut konditioniert.
- ○ f ist in der Nähe von $(1,1)$ gut konditioniert.
- ○ f ist für alle (x,y) mit $x<0$ und $y \neq i\,\pi,\ i\in\mathbb{Z}$ gut konditioniert.

MC 2. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Die Division zweier von Null verschiedener Zahlen ist stets gut konditioniert.
- ⊗ Bei einem stabilen Algorithmus ist die Abweichung im Ergebnis von derselben Größenordnung wie der durch die Kondition des Problems bedingte Fehler.
- ○ Nur für gut konditionierte Probleme gibt es auch stabile Algorithmen.
- ⊗ Die Funktion $f(x,y) := x-y$ ist gut konditioniert für alle $x<0, y>0$.

MC 3. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Die Nachiteration verbessert eine nicht exakte Lösung $\tilde{x}$ des Gleichungssystems $A\,x=b$.
- ○ Mit der Nachiteration lassen sich die Matrizen $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ mit $\tilde{L}\,\tilde{R}\approx A$ so verbessern, dass $\|\tilde{L}\,\tilde{R}-A\|_2$ kleiner wird.
- ○ Die Nachiteration ist nur für symmetrisch positiv definite Matrizen sinnvoll.
- ○ Mittels Nachiteration lassen sich auch Gleichungssysteme $A\,x=b$ mit $\det(A)=0$ eindeutig lösen.

MC 4. Mit $k\in\mathbb{N}$ und den Iterationswerten $x_k\in\mathbb{R}$ gelte $x^* = \lim_{k\to\infty} x_k$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p>1$ gegen x^*, wenn $c>0$ und $k_0\in\mathbb{N}$ existieren, so dass $|x_{k+1}-x^*| \le c|x_k-x^*|^p$ für alle $k\ge k_0$ gilt.
- ○ Die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p=1$ gegen x^*, wenn $c>1$ und $k_0\in\mathbb{N}$ existieren, so dass $|x_{k+1}-x^*| \le c|x_k-x^*|$ für alle $k\ge k_0$ gilt.
- ⊗ Ein iteratives Verfahren hat die Konvergenzordnung $p>1$, wenn sich die Anzahl gültiger Stellen asymptotisch (d. h. für $k\to\infty$) von Iterationsschritt zu Iterationsschritt um den Faktor p vergrößert.
- ○ Je größer die Konvergenzordnung p ist, desto kleiner ist das kleinste $k\in\mathbb{N}$ mit $x_k=x^*$.

MC 5. Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $(d-c)\sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$, mit $c\le x_0<\ldots<x_m\le d$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Ist eine Newton-Cotes-Formel exakt für alle Polynome vom Grade $\le n\in\mathbb{N}$, so ist diejenige Gauß-Formel, die dasselbe m verwendet, exakt für alle Polynome vom Grade $\le 2n-1$.
- ⊗ Sowohl bei Gauß- als auch bei Newton-Cotes-Quadraturformeln hängen die Integrationsgewichte c_j nicht von der Funktion f ab.
- ○ Bei unstetigen Integranden f sind Gauß-Quadraturformeln stets genauer als Newton-Cotes-Formeln, sofern beide dasselbe m verwenden.
- ⊗ Es gilt $I(f) = \frac{d-c}{2}\int_{-1}^1 f(\frac{d+c}{2}+\frac{d-c}{2}\,t)\,\mathrm{d}t$.

MC 6. Es seien $x_{\min}$ bzw. $x_{\max}$ die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch. Ferner beschreibe $\mathrm{fl} : \mathbb{R} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ In $\mathbb{M}(10,3,-8,8)$ gilt $\left|\frac{\mathrm{fl}(x)-x}{x}\right| = (1+\varepsilon)x$ mit $|\varepsilon| \leq 10^{-3}$ $\forall x \neq 0$.
- ⊗ In $\mathbb{M}(10,4,-8,8)$ gilt $\mathrm{eps} = 5 \cdot 10^{-4}$.
- ○ In $\mathbb{M}(10,3,-8,8)$ gilt $x_{\min} = 10^{-8}$.
- ⊗ In $\mathbb{M}(10,4,-8,8)$ gilt $x_{\max} = 99990000$.

MC 7. Mit $A, L, R, P, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ seien R bzw. L eine rechte obere bzw. normierte linke untere Dreiecksmatrix, P eine Permutationsmatrix und D eine Diagonalmatrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Ist A regulär, so existiert stets eine LR–Zerlegung mit Permutationsmatrix P, so dass $PA = LR$ gilt.
- ⊗ Ist A regulär, so existiert stets eine LR–Zerlegung mit Permutationsmatrix P und Diagonalmatrix D, so dass $PDA = LR$ gilt.
- ○ Aus $PDA = LR$ folgt, dass A genau dann positiv definit ist, wenn alle Diagonalelemente von D positiv sind.
- ○ Beschreibt die Diagonalmatrix D eine Zeilenäquilibrierung, so folgt aus $B := DA$ die Ungleichung $\kappa_B \geq \kappa_A$ für die Konditionszahlen von A und B bezüglich der $||\cdot||_\infty$-Norm.

MC 8. Mit $A, L, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei L eine normierte linke untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Ist A regulär, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung mit $A = LDL^T$.
- ⊗ Ist A positiv definit und symmetrisch, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung mit $A = LDL^T$, wobei alle Diagonalelemente von D positiv sind.
- ○ Nur mithilfe einer zusätzlichen Pivotisierung kann man garantieren, dass beim Cholesky-Algorithmus keine Division durch Null auftritt.
- ○ Nur für positiv definite Matrizen A kann man mit dem Cholesky-Algorithmus eine Zerlegung $A = LDL^T$ finden.

MC 9. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Das Gauß-Newton-Verfahren ist stets quadratisch konvergent.
- ⊗ Beim Gauß-Newton-Verfahren kann es passieren, dass das linearisierte Ausgleichsproblem keine eindeutige Lösung besitzt.
- ⊗ Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.
- ○ Zum Erreichen einer festen Zielgenauigkeit benötigt das Levenberg-Marquardt-Verfahren stets weniger Iterationsschritte als das Gauß-Newton-Verfahren.

MC 10. Mit der stetig differenzierbaren Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und den Iterationswerten $x^k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, betrachten wir die Iterationsvorschrift $x^{k+1} := \Phi(x^k)$. Ferner sei E eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, $x^0 \in E$ und $L \in [0,1)$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Ist Φ selbstabbildend und kontraktiv in E, so ist $x^* = \lim_{k\to\infty} x^k$ äquivalent zu $\Phi(x^*) = x^* \in E$, egal ob E konvex ist oder nicht.
- ⊗ Ist die Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ konvex, mit $\Phi(E) \subset E$ sowie $||\Phi'(x)|| \leq L$ $\forall x \in E$ in einer beliebigen Operatornorm, so konvergiert die Folge $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* \in E$.
- ⊗ Ist E konvex, so ist in einer beliebigen Operatornorm $||\Phi'(x)|| \leq L$ $\forall x \in E$ hinreichend für die Kontraktivität von Φ in E.
- ⊗ Φ ist kontraktiv in E, wenn in einer beliebigen Norm gilt $||\Phi(x) - \Phi(y)|| \leq L\,||x - y||$ $\forall x, y \in E$.

MC 11. Mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ betrachten wir das Nullstellenproblem $f(x^*) = 0$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Das vereinfachte Newton-Verfahren benötigt die Ableitung f' (Jacobi-Matrix) nicht.
- ◯ Falls das Newton-Verfahren für den gewählten Startwert konvergiert, konvergiert das gedämpfte Newton-Verfahren für denselben Startwert auch.
- ⊗ Das Sekantenverfahren erlaubt nur die Dimension $n = 1$.
- ◯ Ist $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die Iterationsfolge des Sekantenverfahrens mit der Dimension $n = 1$, so gilt $x^* \in [\min\{x_k, x_{k+1}\}, \max\{x_k, x_{k+1}\}]$.

MC 12. Es seien $m > n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^m$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des linearen Ausgleichproblems $\|A\,x^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$. Weiter sei $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b sowie $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $\|A\,\tilde{x} - \tilde{b}\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - \tilde{b}\|_2$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ $\dfrac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \le \dfrac{\kappa_2(A)}{\sin\Theta} \dfrac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$
- ⊗ $\dfrac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \le \dfrac{\kappa_2(A)}{\cos\Theta} \dfrac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$
- ◯ $\dfrac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \le \tan\Theta\ \kappa_2(A) \dfrac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}$
- ⊗ Je größer der Winkel Θ, desto schlechter ist das Problem konditioniert.

MC 13. Es seien $m \gg n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Es soll die Lösung x^* des linearen Ausgleichproblems $\|A\,x^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ bestimmt werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Der Aufwand bei Lösung mit Normalgleichungen beträgt etwa $\frac{1}{2}n^3$.
- ⊗ Der Aufwand bei Lösung mit Householder-Transformationen beträgt etwa mn^2.
- ◯ Die Lösung mit Normalgleichungen ist stabiler als mit QR-Zerlegung.
- ⊗ Die Lösung mit Normalgleichungen ist schneller als mit QR-Zerlegung.

MC 14. Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$, und $x, x^* \in [x_0, x_n]$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man an der Stelle x^* effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten.
- ◯ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.
- ⊗ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen.
- ⊗ Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x)$ einen Aufwand von $\mathcal{O}\left(n^2\right)$

MC 15. Das Integral $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ für eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion f soll mit Hilfe der Romberg-Quadratur approximiert werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Für die Romberg-Quadratur werden Trapezsummen berechnet.
- ⊗ Bei der Romberg-Quadratur ist bereits die Genauigkeit (Anzahl signifikanter Ziffern) der ersten Näherungen entscheidend für die erzielbare Genauigkeit.
- ⊗ Aus Ergebnissen mit unterschiedlicher Stützstellenweite werden genauere Näherungen extrapoliert.
- ◯ Die Auswertungen mit niedriger Stützstellenweite werden für spätere Auswertungen nicht mehr benötigt.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie eine Zeilenskalierung von A durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix D (mit skalierter Matrix $B := DA$) explizit an.

b) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von B mit Spaltenpivotisierung, d. h. $PB = LR$. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

c) Bestimmen Sie die Determinante von A mithilfe der durchgeführten LR-Zerlegung.

---

a) Zeilenäquilibrierung:

$$D = \begin{pmatrix} 0.1111 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}, \qquad B := DA = \begin{pmatrix} -0.3333 & 0 & 0.6667 \\ 0.3 & -0.2 & 0.5 \\ 0.4 & -0.6 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) LR-Zerlegung:

$$B \overset{\text{Pivot}(3,2,1)}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 & 0 \\ 0.3 & -0.2 & 0.5 \\ -0.3333 & 0 & 0.6667 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{c|cc} 0.4 & -0.6 & 0 \\ \hline 0.75 & 0.25 & 0.5 \\ -0.8333 & -0.5 & 0.6667 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{Pivot}(3,1,2)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{c|cc} 0.4 & -0.6 & 0 \\ \hline -0.8333 & -0.5 & 0.6667 \\ 0.75 & 0.25 & 0.5 \end{array}\right) \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0.4 & -0.6 & 0 \\ \hline -0.8333 & -0.5 & 0.6667 \\ \hline 0.75 & -0.5 & 0.8333 \end{array}\right)$$

$$\text{also:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.8333 & 1 & 0 \\ 0.75 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.6667 \\ 0 & 0 & 0.8333 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ (“in welcher Spalte steht jeweils die Eins?”, nie als Matrix speichern!).

c) Da $\det(P) = (-1)^{\#\text{Zeilenvertauschungen}} = (-1)^2 = 1$ ist, und da stets $\det(L) = 1$ gilt, erhalten wir mit $PDA = LR$

$$\det(A) = \det(D^{-1}P^{-1}LR) = \frac{\det(R)}{\det(P)\det(D)} = \frac{0.4 \cdot (-0.5) \cdot 0.8333}{(-1)^2 \cdot 0.1111 \cdot 0.1 \cdot 0.2} = -75\,.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Lösen Sie approximativ das Gleichungssystem

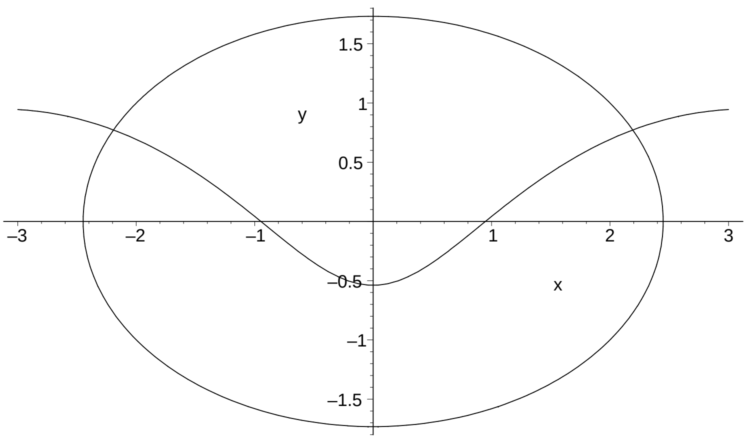
$$\begin{aligned} e^y + \cos x &= 2 + \cos 2 \\ x^2 + 2\,y^2 &= 6 \end{aligned}$$

mittels zweier Iterationen des Newton-Verfahrens für Systeme. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an. Benutzen Sie als Startwert

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

.

Skizze (Ellipse in Normallage mit Hauptachsen $a = \sqrt{6} \approx 2.45$ und $b = \sqrt{3} \approx 1.73$, $y(x) = \ln(-\cos x + 2 + \cos 2)$. Zu skizzieren ist der gesamte Bereich:



Newton-Verfahren:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x + e^y - 2 - \cos 2 \\ x^2 + 2 \cdot y^2 - 6 \end{pmatrix} \to f'(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x & e^y \\ 2 \cdot x & 4 \cdot y \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0.909297 & 1 & | & 1 \\ 4 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \to \Delta x_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.45465 \end{pmatrix} \to x_1 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.45465 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.45465 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0.598472 & 4.28298 & | & -1.89798 \\ 5 & 5.81859 & | & -4.48201 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 5 & 5.81859 & | & -4.48201 \\ 0 & 4.97943 & | & -2.43445 \end{pmatrix} \to \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -0.327457 \\ -0.488902 \end{pmatrix} \to x_2 = \begin{pmatrix} 2.17254 \\ 0.965747 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Die Funktion $y(t) := (t-a)^2 + b\,t$ soll im Sinne minimaler Fehlerquadrate an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	0.5	1	2
y_i	1.1	2.1	4.8

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem ($\|F(x)\|_2 \to \min$) in Abhängigkeit von a und b durch Einsetzen aller Messwerte explizit auf.

b) Gegeben seien die Startwerte $a_0 = 0.5$ und $b_0 = 1$. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt des Gauß-Newton-Verfahrens?

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1.6 & 1 \\ 1.2 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen. Geben Sie x und das Residuum explizit an.

---

a) Die i-te Zeile des (überbestimmten) Gleichungssystems lautet

$$r_i := y(t_i) - y_i = (t_i - a)^2 + b\,t_i - y_i \stackrel{!}{=} 0.$$

Somit ergibt sich das nichtlineare Ausgleichsproblem

$$\|F(x)\|_2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^2}$$

mit

$$F(x) = F(a,b) = \begin{pmatrix} (0.5-a)^2 & + & 0.5 \cdot b & - & 1.1 \\ (1-a)^2 & + & b & - & 2.1 \\ (2-a)^2 & + & 2 \cdot b & - & 4.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - a & + & 0.5 \cdot b & - & 0.85 \\ a^2 - 2a & + & b & - & 1.1 \\ a^2 - 4a & + & 2 \cdot b & - & 0.8 \end{pmatrix}$$

b) Die allgemeine Form des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems lautet

$$\|F'(x)\Delta x + F(x)\| \to \min .$$

Die i-te Zeile der Jakobischen F' ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -2(t_i - a) & t_i \end{pmatrix}.$$

Setzen wir nun die Startwerte $(a_0, b_0) = (0.5, 1)$ in die Zeilen $(i = 1, 2, 3)$ ein, so erhalten wir :

$$F'(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } F(x_0) = \begin{pmatrix} -0.6 \\ -0.85 \\ -0.55 \end{pmatrix}.$$

c) Zur Loesung des linearen Ausgleichsproblems:

Eliminiere a_{21}, $r = 2, c = 0.8, s = 0.6$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1.6 & 1 & 2 \\ 1.2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Eliminiere a_{41}, $r = 2.82843, c = 0.70711, s = 0.70711$:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2.82843 & 2.82843 & | & 4.24264 \\ 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & -1.41421 \end{pmatrix}$$

Eliminiere a_{32}, $r = 1.41421, c = 0.70711, s = -0.70711$:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2.82843 & 2.82843 & | & 4.24264 \\ 0 & 1.41421 & | & 1.41421 \\ 0 & 0 & | & 1.41421 \\ 0 & 0 & | & -1.41421 \end{pmatrix}$$

Damit ist $x_2 = 1$ und $x_1 = 0.5$, also

$$x = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Residuum ist $\|r\|_2 = \sqrt{1.41421^2 + (-1.41421)^2} = 2$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	-2	-1	0	1
y_i	2	-2	1	3

a) Berechnen Sie die vier fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

$$
\begin{array}{l|lllllll}
x_0 = -2 & 2 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1 = -1 & \text{-2} & \rightarrow & \text{-4} & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2 = 0 & 1 & \rightarrow & [\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]\mathbf{y} & \rightarrow & 3.5 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3 = 1 & [\mathbf{x_3}]\mathbf{y} & \rightarrow & [\mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}]\mathbf{y} & \rightarrow & [\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}]\mathbf{y} & \rightarrow & -\frac{4}{3}
\end{array}
$$

b) Stellen Sie das Interpolationspolynom $p_3(x)$ vom Grad 3 in Newton- oder Horner-artiger Form auf.

c) Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen Fehler $|p_3(x) - y(x)|$ im **Intervall** $[-1, 0]$ an.
Hinweis: Für die Ableitungen von y gelte $|y^{(3)}(x)| \leq 2$, $|y^{(4)}(x)| \leq 1.2$, $|y^{(5)}(x)| \leq 4.8$ $\forall x \in [-2, 1]$, und das Knotenpolynom hat Extremstellen bei $x_{E_{1,2}} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ und $x_{E_3} = -\frac{1}{2}$.

---

a) Newton-Schema:

$$
\begin{array}{l|lllllll}
x_0 = -2 & 2 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1 = -1 & \text{-2} & \rightarrow & \text{-4} & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2 = 0 & 1 & \rightarrow & \boxed{3} & \rightarrow & 3.5 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3 = 1 & \boxed{3} & \rightarrow & \boxed{2} & \rightarrow & \boxed{\text{-0.5}} & \rightarrow & -\frac{4}{3}
\end{array}
$$

b) Interpolationspolynom in Horner-artiger Form:

$$p_3(x) = 2 + (x+2)\left\{-4 + (x+1)\left[3.5 + x\left(-\frac{4}{3}\right)\right]\right\}.$$

c) An den Intervallrändern von $[-1, 0]$ ist das Knotenpolynom $\omega(x)$ Null. Es liegt hier nur die Extremstelle $x_{E_3} = -1/2$ im Intervall : $|\omega(x_{E_3})| = 0.5625$, also

$$\max_{x\in[-1,0]} |p_3(x) - y(x)| \leq \max_{x\in[-1,0]} |\omega(x)| \frac{1}{4!} \max_{\xi\in[-2,1]} |y^{(4)}(\xi)| \leq 0.5625 \, \frac{1}{24} \, 1.2 = 0.028125\,.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Das Integral

$$I := \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit} \quad f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$$

soll numerisch approximiert werden.
Hinweis: Für die Ableitungen des Integranden $f(x)$ gilt $f'(x) = -2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2}$, $f''(x) = \left(4\,x^2 - 2\right)\mathrm{e}^{-x^2}$, $f'''(x) = \left(12\,x - 8\,x^3\right)\mathrm{e}^{-x^2}$, $f^{(4)}(x) = \left(16\,x^4 - 48\,x^2 + 12\right)\mathrm{e}^{-x^2}$,

a) Bestimmen Sie I näherungsweise mit der 3–Punkt Gauß–Quadratur

$$I_G(f) = \frac{5}{9}\,f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\,f(0) + \frac{5}{9}\,f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \approx \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Hinweis: Transformieren Sie diese Formel zunächst auf das Intervall $[-2, 2]$.

b) Approximieren Sie I mit der summierten Trapezregel auf eine gesicherte Genauigkeit von 0.75.
Hinweis: Schätzen Sie $|f''(x)|$ möglichst gut ab.

---

zu a):
Transformation auf $[-2, 2]$;

$$I_{\tilde{G}}(f) = 2\left(\frac{5}{9}\,f\left(-2\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}\,f(0) + \frac{5}{9}\,f\left(2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right).$$

Einsetzen (beachte: f ist hier eine gerade Funktion, d,h. $f(x) = f(-x)$

$$I \approx I_{\tilde{G}} = \frac{20}{9}\,e^{-\frac{12}{5}} + \frac{16}{9} = 1.97937\,.$$

zu b):
Wir benötigen das Betragsmaximum der zweiten Ableitung. Die dritte Ableitung ist 0 für $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm\sqrt{1.5}$ $(= \pm 1.224744872)$. $f''(x_1) = -2$, $f''(x_2) = f''(x_3) = 0.8\ldots$ (0.8925206404). Ränder: $f''(-2) = f''(2) = 0.2\ldots$ (0.2564189445). Also ist $\max_{x\in[-2,2]} |f''(x)| = 2$. Damit gilt hier:

$$err_{ST} \leq \frac{4}{12}\,2\,h_{ST}^2 = \frac{2}{3}\,h_{ST}^2 \overset{!}{\leq} 0.75\,.$$

Das ist für $h_{ST} \leq \sqrt{2.25/2}$ $(= 1.061)$ erfüllt, woraus $n \geq 3.771\ldots$ folgt, und wir erhalten $n = 4$ und $h = 1$. Zur Berechnung benutzen wir wieder die Symmetrie von f und erhalten:

$$I_{ST} = \frac{1}{2}\left(2\,e^{-4} + 4\,e^{-1} + 2\,e^{0}\right) = 1.754 \approx I\,(= 1.764162782)$$