RWTH–Aachen **Institut für Geometrie und Praktische Mathematik**

Multiple-Choice-Test (30 Punkte)

Bei jeder MC-Aufgabe ist **mindestens eine Aussage korrekt**. Wird dennoch bei einer MC-Aufgabe keine einzige Aussage angekreuzt, gilt diese Aufgabe als **nicht bearbeitet** und wird mit **0 Punkten** bewertet.

Ansonsten gibt es für **jede falsche Antwort −0.5 Punkte**, und für **jede korrekte Antwort 0.5 Punkte**, so dass man pro MC-Aufgabe −2 bis 2 Punkte erreichen kann. Da aus dem MC-Test als Ganzes keine negativen Punkte entstehen dürfen, kann man bei 15 MC-Aufgaben **insgesamt zwischen 0 und 30 Punkten** erreichen.

Um Flüchtigkeitsfehlern vorzubeugen, sind **durchgängig nur korrekte Aussagen anzukreuzen**.

MC 1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ $\|A\|_\infty = \|A^T\|_1$
- ○ Falls A invertierbar ist, gilt $\|AA^{-1}\| = \|A\|\,\|A^{-1}\|$.
- ○ $\kappa(A) = 1 \Rightarrow A = I$
- ○ $\kappa(A) = \|A\|\|A^T\|$

MC 2. Seien $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ eine Menge von Maschinenzahlen (normalisierte Gleitpunktdarstellung) und $\mathrm{fl} : \mathbb{R} \to \mathbb{M}$ die zugehörige Reduktionsabbildung. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Die betragsmäßig kleinste darstellbare Zahl ist $x_{min} = b^{-r-1}$.
- ○ Für die betragsmäßig kleinste darstellbare Zahl x_{min} gilt $\mathrm{fl}(1 + x_{min}) = 1$.
- ⊗ Die relative Maschinengenauigkeit ist $\mathrm{eps} := \frac{b^{1-m}}{2}$.
- ○ fl ist stetig auf $\mathbb{R}$.

MC 3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit relativer Kondition $\kappa_{rel}(x)$. Weiter sei $x_0 \in \mathbb{R}$ fest, $\tilde{x}_0 = x_0 + \Delta x$ ein gestörtes x_0 und $\tilde{f}(x)$ eine numerische Näherung an f. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ $\frac{|\tilde{f}(\tilde{x}_0)-f(x_0)|}{|f(x_0)|} \le \kappa_{rel}(x_0)|\Delta x|$
- ⊗ Bei einem stabilen Verfahren zur Berechnung von $\tilde{f}(\tilde{x}_0)$ ist $\frac{|\tilde{f}(\tilde{x}_0)-f(x_0)|}{|f(x_0)|}$ von der gleichen Größenordnung wie $\frac{|f(\tilde{x}_0)-f(x_0)|}{|f(x_0)|}$.
- ○ Der Fehler $\frac{|\tilde{f}(\tilde{x}_0)-f(x_0)|}{|f(x_0)|}$ hängt nur von Δx ab.
- ⊗ $\kappa_{rel}(x)$ beschreibt in erster Näherung den bei exakter Rechnung zu erwartenden Fehler bei gestörten Daten.

MC 4. Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Durch Pivotisierung kann die Stabilität der LR-Zerlegung verbessert werden.
- ○ Pivotisierung verbessert die Kondition des linearen Gleichungssystems.
- ⊗ Die Ermittlung der Lösung mit Hilfe von Givens-Rotationen ist stabil.
- ○ Das Cholesky-Verfahren ist nur mit Pivotisierung stabil.

MC 5. Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \gg n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ zu $Ax = b$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ x läßt sich mit Hilfe der LR-Zerlegung von A bestimmen.
- ○ Der Aufwand der QR-Zerlegung mit Givens-Rotationen ist etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.
- ⊗ Der Aufwand der QR-Zerlegung mit Householder-Spiegelungen ist etwa mn^2 Operationen.
- ⊗ Für dünn besetzte Matrizen können Givens-Rotatioen effizienter sein als Householder-Spiegelungen.

MC 6. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $QR = A$ eine Zerlegung von A mit Q orthogonal und R eine rechte, obere Dreiecksmatrix. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ $Ax = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$
- ⊗ $\kappa_2(A) = \kappa_2(Q^{-1})\kappa_2(R)$
- ◯ Zur Lösung von $Ax = b$ über die QR-Zerlegung muss Q explizit bestimmt werden.
- ⊗ $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(R)$

MC 7. Das skalare bzw. mehrdimensionale Nullstellenproblem $f(x) = 0$ soll iterativ gelöst werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Bei mehrdimensionalen Problemen erfordert das Newton-Verfahren in jedem Iterationsschritt das Lösen eines linearen Gleichungssystems.
- ⊗ Während beim Newtonverfahren in jedem Schritt ein neues lineares Gleichungssystem gelöst werden muss, ändert sich beim vereinfachten Newtonverfahren nur die rechte Seite $-f(x^k)$.
- ◯ Das vereinfachte Newton-Verfahren trägt seinen Namen, weil es stets ohne die Lösung eines linearen Gleichungssystems auskommt.
- ◯ Beim Newton-Verfahren ist x^{k+1} die Nullstelle der quadratischen Näherung an die Funktion f im Punkt x^k.

MC 8. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^* und es gelte $f(x^*) = 0$. Wir betrachten die Newton-Methode zur Bestimmung von x^*:

$$x_0 \in U, \qquad x_{k+1} = x_k - \left(f'(x_k)\right)^{-1} f(x_k) \quad \text{für } k \geq 0.$$

Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Die Newton-Methode ist immer lokal quadratisch konvergent.
- ◯ Die Newton-Methode ist nur lokal quadratisch konvergent, falls man die Berechnung von $\left(f'(x_k)\right)^{-1}$ vermeidet.
- ⊗ Wenn $f'(x)$ in für alle $x \in U$ regulär ist und das Newton-Verfahren konvergiert, dann gilt für genügend große k's : $||x_k - x^*|| \approx ||x_k - x_{k+1}||$.
- ◯ Die Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens kann durch Verwendung orthogonaler Transformationen zur Lösung des auftretenden Gleichungssystems beschleunigt werden.

MC 9. Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ◯ Das Gauß-Newton-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.
- ◯ Das Levenberg-Marquardt-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.
- ⊗ Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.
- ◯ Beim Gauß-Newton-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.

MC 10. Sei $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$ mit den Stützstellen $x_0 < \ldots < x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Seien l_{jn} die Lagrangeschen Fundamentalpoynome. Dann gilt für das Interpolationspolynom: $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, l_{jn}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- ◯ $P(f|x_0, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{n+1} a_i\, x$ ist ein Polynom vom Grad $n+1$ mit $a_{n+1} \neq 0$.
- ⊗ Es existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.
- ⊗ $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

MC 11. Sei $P(f|x_0,\ldots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i=0,\ldots,n$ mit den Stützstellen $a=x_0<\ldots<x_n=b$ für $n\in\mathbb{N}$. Sei $e(x):=f(x)-P(f|x_0,\ldots,x_n)$, $x\in\mathbb{R}$ der Fehler im Intervall $I:=[\min(a,x),\max(b,x)]$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ $e(x_i)=0$, $i=0,\ldots,n$.
- ⊗ Für $f\in C^{n+1}(I)$ existiert ein $\xi\in I$, so dass $e(x)=\prod_{i=0}^n(x-x_i)\,\frac{1}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi)$.
- ○ Es sei $[c,d]\subsetneq I$. Der Interpolationsfehler lässt sich dann für alle $x\in[c,d]$ wie folgt abschätzen: $|e(x)|\le\max_{z\in[c,d]}|\prod_{i=0}^n(z-x_i)|\,\max_{z\in[c,d]}\frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!}$.
- ○ Sei $f(x)=1/(1+x^2)$, $x\in[-5,5]$. Für festes $n\in\mathbb{N}$ seien die Stützstellen $x_{j,n}=-5+10\,j/n$, $j=0,\ldots,n$ gegeben. Dann gilt für den Fehler: $\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[-5,5]}|f(x)-P(f|x_0,\ldots,x_n)|=0$.

MC 12. $P(f|x_0,\ldots,x_n)$ löse das Lagrange-Interpolationsproblem zu den Daten $f(x_i)$, $i=0,\ldots,n$ für $n\in\mathbb{N}$ mit den Stützstellen $a=x_0<\ldots<x_n=b$. Das Interpolationspolynom soll an einer festen Stelle $x\in[a,b]$ berechnet werden. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Der Aufwand für die Berechnung über die Lagrange-Darstellung ist $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen.
- ⊗ Der Aufwand für die Berechnung über die Newton-Darstellung ist $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen.
- ⊗ Der Aufwand für die Berechnung über das Neville-Aitken-Schema ist $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen.
- ⊗ Die Auswertung der Newton-Darstellung kann über ein Horner-artiges Schema durchgeführt werden und erfordert $\mathcal{O}(n)$ Operationen.

MC 13. Sei $f\in C[a,b]$. Das Integral $I(f):=\int_a^b f(x)dx$ werde durch eine Newton-Cotes-Formel $I_m(f)$ zu Stützstellen $a\le x_0<\ldots<x_m\le b$ approximiert. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ $I_m(f)=\int_a^b P(f|x_0,\ldots,x_m)dx$ wobei $P(f|x_0,\ldots,x_m)$ das Interpolationspolynom von f zu den Stützstellen $x_0<\ldots<x_m$ ist.
- ⊗ $I_m(q)=I(q)$ für alle $q\in\Pi_m$.
- ○ Falls $f\in C^{m+1}[a,b]$, dann gilt für den Fehler $|I(f)-I_m(f)|\le\frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(m+1)}(x)\right|$.
- ⊗ Bei Newton-Cotes-Formeln höherer Ordnung kann Auslöschung auftreten (instabil).

MC 14. Sei $f\in C[a,b]$. Das Integral $I(f):=\int_a^b f(x)dx$ werde durch eine Gauss-Formel $\tilde{I}_m(f):=\sum_{i=0}^m\omega_i\,f(x_i)$ approxomiert. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Die Stützstellen sind äquidistant verteilt.
- ⊗ $\tilde{I}_m(q)=I(q)$ für alle $q\in\Pi_{2m+1}$.
- ⊗ Die Gewichte ω_i sind alle positiv.
- ⊗ Falls $f\in C^{2m+2}[a,b]$, dann gibt es ein c_m, so dass für den Fehler gilt: $|I(f)-\tilde{I}_m(f)|\le c_m\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(2m+2)}(x)\right|$.

MC 15. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Mittels Extrapolation kann man die Genauigkeit einer Quadraturformel verbessern.
- ○ Mittels Extrapolation kann man die Stabilität einer Quadraturformel erhöhen.
- ⊗ Zur Konstruktion eines Extrapolationsschemas ist eine asymptotische Fehlerentwicklung des Diskretisierungsfehlers erforderlich.
- ⊗ Mit dem Romberg-Schema erhöht sich mit jeder weiteren Spalte die Genauigkeit um 2 Potenzen in h.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 13-\alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Für welche Werte von α ist A positiv definit?

b) Lösen Sie $Ax = b$ mittels Cholesky-Verfahren für $\alpha = 0$. (L-R-Zerlegung / Gauß gibt 0 Punkte!)

Teil a)

1. Cholesky-Verfahren:
$$d_{11} = 1, \qquad l_{21} = 2, \quad l_{31} = 2;$$
$$d_{22} = 6 - 2^2 \cdot 1 = 2, \qquad l_{32} = (4 - 2 \cdot 2 \cdot 1)/2 = 0;$$
$$d_{33} = (13 - \alpha^2) - 2^2 \cdot 1 - 0^2 \cdot 2 = 9 - \alpha^2.$$

2. L-D-L^T-Zerlegung von A:
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9-\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

3. Einschränkungen für α:
$$9 - \alpha^2 > 0 \Leftrightarrow |\alpha| < 3 .$$
Also muss $\alpha \in (-3, 3)$ sein, damit A positiv-definit ist.

Teil b) Lösung des Gleichungssystems:

$$L\,z = b \rightarrow \quad z = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$D\,y = z \rightarrow y = \begin{pmatrix} 2 \\ -3/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

$$L^T\,x = y \rightarrow x = \begin{pmatrix} 17/3 \\ -3/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gesucht sind die Nullstellen der Funktion

$$f(\mathbf{x}) = f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - 3\,x\,y + 5 \\ -2\,y^2 + 5\,x\,y - 4 \end{pmatrix}$$

a) Fertigen Sie für den 1. Quadranten eine Skizze an, und bestimmen Sie daraus den bestmöglichen ganzzahligen Startwert $\mathbf{x}_0$.

b) Stellen Sie für diesen Startwert das lineare Gleichungssystem für des Newton-Verfahrens zur Bestimmung von $\mathbf{x}_1$ auf (nicht ausrechnen!).

c) Zur Bestimmung der Nullstelle im 3. Quadranten wird der Startwert $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (-1, -2)$ gewählt. Dann ist die L-R-Zerlegung von $f'(\mathbf{x}_0)$ gegeben durch

$$f'(-1,-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 10.5 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie damit zwei Schritte des vereinfachten Newton-Verfahrens durch und geben Sie $\mathbf{x}_2$ explizit an.

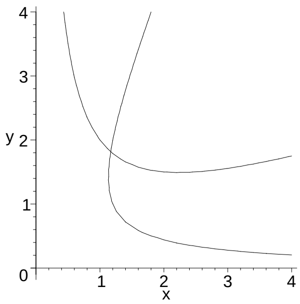
Skizze und Startwert

Skizze: z.B.

$$y = \frac{x^2+5}{3\,x} \quad \to (1,2),\ \left(2, \frac{3}{2}\right),\ \ldots \text{ und Asymptoten } x = 0 \text{ sowie } y = \frac{x}{3} \qquad \text{und}$$

$$x = 2\,\frac{y^2+2}{5\,y} \quad \to \left(\frac{6}{5}, 1\right),\ \left(\frac{6}{5}, 2\right), \ldots \text{ und Asymptoten } y = 0 \text{ sowie } x = \frac{2}{5}\,y$$

Zu skizzieren ist nur der 1. Quadrant:



Der zugehörige beste ganzzahlige Startwert ist offenbar $\mathbf{x}_0 = (1, 2)$.

Newton-Verfahren:

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2\,x - 3\,y & -3\,x \\ 5\,y & -4\,y + 5\,x \end{pmatrix} \quad \to \quad f'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Also lautet das zugehörige LGS

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix} \Delta\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vereinfachtes Newton-Verfahren

Jetzt $\mathbf{x}_0 = (-1, -2)$. Gemäß Aufgabenstellung gilt dann:

$$f'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 10.5 \end{pmatrix} \quad , \quad -f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \to \Delta\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -0.14286 \\ 0.19048 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1.1429 \\ -1.8095 \end{pmatrix} \to -f(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} -0.10204 \\ 0.20862 \end{pmatrix}$$

$$\to \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} -0.10204 \\ -0.046485 \end{pmatrix} \to \Delta\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -0.022190 \\ -0.0044272 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1.1650 \\ -1.8140 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben sind die drei Meßwerte

t_i	0	2	3
y_i	2	4	5

,

die der Theorie nach zu einer Funktion der Form

$$y(t) = \alpha \frac{1}{2+t} + \beta\, t$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|A\,x - b\|_2 \to \min$ auf. Geben Sie A und b explizit an.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem ausnahmsweise mittels der Normalgleichungen. Geben Sie die Lösung $y(t)$ sowie das Residuum explizit an.

a)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 2 \\ \frac{1}{5} & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

b) Für die Normalgleichungen $\left(A^T A\,x = A^T b\right)$ berechnet man

$$A^T A = \begin{pmatrix} \frac{141}{400} & \frac{11}{10} \\ \frac{11}{10} & 13 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^T b = \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \end{pmatrix} \to \left(A^T A | A^T b\right) = \begin{pmatrix} 0.3525 & 1.1 & | & 3 \\ 1.1 & 13 & | & 23 \end{pmatrix}$$

Eliminieren und Rückwärtseinsetzen liefert dann

$$\to \begin{pmatrix} 0.3525 & 1.1 & | & 3 \\ 0 & 9.5674 & | & 13.638 \end{pmatrix} \to x = \begin{pmatrix} 4.0623 \\ 1.4255 \end{pmatrix}$$

Und somit: $y(t) = 4.0623 \dfrac{1}{2+t} + 1.4255\, t$.

Das Residuum ist $\sqrt{\sum_{i=1}^{3} (y(t_i) - y_i)^2} = \|A\,x - b\|_2 = 0.16336$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \cos^2(t)\,dt$$

ist als Tabelle gegeben.

x_i	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
$f(x_i)$	0	0.24486	0.46037	0.62437	0.72732	0.77462	0.78528	0.78730

a) Bestimmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(1.1)$ mit dem Neville–Aitken–Schema unter Benutzung von 3 Tabellenwerten.

b) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung an.
Hinweis: $\sin(x)\,\cos(x) = \frac{1}{2}\,\sin(2\,x)$

a) Die Benutzung von 3 Tabellenwerten entspricht der Interpolation mit einem quadratischen Polynom p_2. Die diesbezügliche Fehlerabschätzung lautet

$$|f(\bar{x}) - p_2(\bar{x})| \leq \frac{1}{3!} \max_{z\in[x_0,x_2]} |f'''(z)| \cdot |(\bar{x}-x_0)\,(\bar{x}-x_1)\,(\bar{x}-x_2)|.$$

Da $\bar{x} = 1.1$ gilt, wird der das Knotenpolynom betreffende Anteil durch die Wahl $x_0 = 0.75$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.25$ minimiert.
Das Neville–Aitken–Schema ergibt folgendes Tableau (letzte Zeile für Stützstellen 1, 1.25, 1.5):

x_i	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0.75$	0.624370		
$x_1 = 1.00$	0.727320	0.768500	
$x_2 = 1.25$	0.774620	0.746240	0.752918
$x_3 = 1.50$	0.785280	0.768224	0.750637

Damit erhalten wir die Näherung $f(1.1) \approx p_2(1.1) = P_{2,2} = 0.752918$.

Für die Fehlerabschätzung benötigen wir die Ableitungen von f. Für die erste nutzen wir den Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung aus, und die verbleibenden Ableitungen vereinfachen sich durch ein Additionstheorem.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos^2(x), \\ f''(x) &= -2\,\sin(x)\,\cos(x) = -\sin(2\,x), \\ f'''(x) &= -2\,\cos(2\,x) = 2\left(\sin^2(x) - \cos^2(x)\right). \end{aligned}$$

Im Intervall $[(0<)0.75, 1.1(<0.5\,\pi)]$ ist $-\cos(2\,x)$ monoton steigend. Also untersuchen wir nur die Ränder:

$$\max_{z\in[x_0,x_2]} |f'''(z)| = 2\,\max\{|\cos(1.5)|,\,|\cos(2.5)|\} = 1.6023.$$

Für das Knotenpolynom ergibt sich

$$|(\bar{x}-x_0)\,(\bar{x}-x_1)\,(\bar{x}-x_2)| = 0.35\cdot 0.1\cdot 0.15 = 0.525\cdot 10^{-2},$$

und somit

$$|f(\bar{x}) - p_2(\bar{x})| \leq \frac{1}{6}\cdot 1.6023\cdot 0.525\cdot 10^{-2} = 0.14020\cdot 10^{-2} \approx 1.4\cdot 10^{-3}.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Für das Integral

$$I = \int_0^1 \sin(x^2)dx$$

steht kein geschlossener analytischer Ausdruck zur Verfügung. Wir müssen also auf eine numerische Methode zurückgreifen.

a) Wieviel Schritte (n) braucht man mit der

i) summierten Trapezregel (**Hinweis:** Schätzen Sie die entsprechende Ableitung ab, ohne die Extrema zu bestimmen.),

ii) summierten Simpsonregel (**Hinweis:** Für $f(x) = \sin(x^2)$ gilt $\max_{\xi\in[0,1]} |f^{(4)}(\xi)| < 30$),

um eine Genauigkeit von $\epsilon = 10^{-3}$ zu erreichen?

b) Führen Sie die Berechnung gemäß a)(ii) durch.

zu a):

(i) Mit $f(x) = \sin(x^2)$ folgt (Wert von $\max_{\xi\in[0,1]} |f^{(2)}(\xi)|$)

$$f'(x) = 2\,x\,\cos(x^2) \;\rightarrow\; f''(x) = 2\cos(x^2) - 4\,x^2\,\sin(x^2),$$

Und somit gilt

$$\max_{\xi\in[0,1]} |f^{(2)}(\xi)| \leq 2\cdot 1 + 4\cdot 1^2\,\sin(1^2) = 5.36... \leq 5.37$$

Mit der Fehlerformel für die summierten Trapezregel folgt dann:

$$\left(\frac{b-a}{12}\frac{(b-a)^2}{n^2}\max_{\xi\in[0,1]}|f^{(2)}(\xi)| \overset{!}{\leq} \epsilon \rightarrow\right) n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\,\epsilon}\max_{\xi\in[0,1]}|f^{(2)}(\xi)|} = \sqrt{\frac{1}{12\cdot 10^{-3}}5.37} = 21.1....$$

Also braucht man 22 Schritte mit der summierten Trapezregel.

(ii) Anzahl der Schritte mit der summierten Simpsonregel:

$$\left(\frac{b-a}{2880}\frac{(b-a)^4}{n^4}\max_{\xi\in[0,1]}|f^{(4)}(\xi)| \overset{!}{\leq} \epsilon \rightarrow\right) n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{2880\,\epsilon}\max_{\xi\in[0,1]}|f^{(4)}(\xi)|} = \sqrt[4]{\frac{1}{2880\cdot 10^{-3}}30} = 1.7...$$

Also 2 Unterteilungen.

Teil b)

Summierte Simpsonregel, zwei Teilintervalle:

$$I \approx \frac{0.5}{6}\left(\sin(0^2) + 4\sin[(1/4)^2] + 2\sin[(1/2)^2] + 4\sin[(3/4)^2] + \sin[(1)^2]\right)$$

also

$$I \approx 0.309944.$$