Multiple-Choice-Test (24 Punkte)

Bei jeder MC-Aufgabe ist **mindestens eine Aussage korrekt**. Wird dennoch bei einer MC-Aufgabe keine einzige Aussage angekreuzt, gilt diese Aufgabe als **nicht bearbeitet** und wird mit **0 Punkten** bewertet.

Ansonsten gibt es für **jede falsche Antwort -0.5 Punkte**, und für **jede korrekte Antwort 0.5 Punkte**, so dass man pro MC-Aufgabe -2 bis 2 Punkte erreichen kann. Da aus dem MC-Test als Ganzes keine negativen Punkte entstehen dürfen, kann man bei 12 MC-Aufgaben **insgesamt zwischen 0 und 24 Punkten** erreichen.

Um Flüchtigkeitsfehlern vorzubeugen, sind **durchgängig nur korrekte Aussagen anzukreuzen**.

MC 1. Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ○ Der Aufwand der QR-Zerlegung mit Householder-Reflektionen ist etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.
- ⊗ Sei $\tilde{x}$ eine Annäherung an x und $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Dann gilt: $||x - \tilde{x}|| \cdot ||b|| \leq \kappa(A) \cdot ||x|| \cdot ||\tilde{r}||$
- ⊗ $\kappa_2(A) > 0$
- ⊗ Sei $\tilde{x}$ eine Annäherung an x und $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Dann gilt: $||x - \tilde{x}|| \cdot ||b|| \leq \kappa(A^{-1}) \cdot ||x|| \cdot ||\tilde{r}||$

MC 2. Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Der Rechenaufwand beim Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen beträgt jeweils $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.
- ○ Skalierung/Äquilibrierung verbessert die Stabilität der LR-Zerlegung.
- ⊗ Pivotisierung verbessert die Stabilität der LR-Zerlegung.
- ○ Die Nachiteration verbessert die Kondition des Problems.

MC 3. Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \gg n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ zu $\|A\,x - b\|_2 \to \min$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ $||A||_2 = ||QA||_2$ für alle orthogonalen Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$
- ⊗ $||Ax - b||_2 = \min \Leftrightarrow Ax - b \perp \text{Bild}(A)$.
- ○ Für reguläre Matrizen A gilt im Allgemeinen: $\kappa_2(A^TA) \approx 2\kappa_2(A)$.
- ○ Es existiert stets ein eindeutiges $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $A^TAx^* = A^Tb$.

MC 4. Gegeben sei die Funktion $f : (0, \infty] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \ln(x)$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = \left|\frac{1}{\ln(x)}\right|$.
- ○ Für $|x - 1| \ll 1$ ist $f(x)$ gut konditioniert.
- ○ Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = \left|\frac{1}{x}\right|$.
- ⊗ Für $x \to \infty$ ist $f(x)$ gut konditioniert.

MC 5. Sei $f(x,y) = x \bigtriangledown y$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\bigtriangledown \in \{+, -, \times, \mathrm{div}\}$ und κ_{rel} die relative Konditionszahl von f. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

⊗ Für die Multiplikation und die Division ist $\kappa_{rel} \leq 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

○ Für die Addition und die Subtraktion ist $\kappa_{rel} \gg 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

⊗ Bei der Addition und der Subtraktion kann eine sehr große relative Fehlerverstärkung auftreten.

○ Die relativen Rundungsfehler bei den elementaren Gleitpunktoperationen $\circledtriangledown$ sind betragsmäßig kleiner als die Maschinengenauigkeit.

MC 6. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ das Interpolationspolynom, das die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ interpoliert. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

○ Erhöht man sukzessive den Polynomgrad n, so erhält man eine immer genauere Näherung der zu interpolierenden Funktion f in $[a, b]$.

○ Die Wahl der Stützstellen hat keinen Einfluss auf den Interpolationsfehler.

⊗ Falls $f \in C^{n+1}([a, b])$, dann hängt der Interpolationsfehler im Intervall $[a, b]$ von dem Knotenpolynom $\omega_{n+1}(x) := \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ und dem Maximum von $|f^{(n+1)}(x)|$ in $[a, b]$ ab.

○ Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation.

MC 7. Sei $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ von der Funktion f zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$. Ferner sei $a := \min_{0 \leq i \leq n} x_i$ und $b := \max_{0 \leq i \leq n} x_i$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

○ Die dividierte Differenz hängt von der Reihenfolge der Stützstellen ab.

⊗ Falls $f \in C^n([a, b])$, dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $[x_0, \ldots, x_n]f = f^{(n)}(\xi)/n!$.

○ Für die Newtonsche Interpolationsformel gilt:

$$p(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{i=0}^{n} [x_0, \ldots, x_i]f \prod_{j=0}^{i} (x - x_j)$$

.

⊗ Falls die Stützstellen paarweise verschieden sind, dann gilt:
$[x_0, \ldots, x_n]f = ([x_1, \ldots, x_n]f - [x_0, \ldots, x_{n-1}]f)/(x_n - x_0)$.

MC 8. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'''(t) + 2\,y''(t) - y'(t)\,y^2(t) = \sin(t) \text{ mit } y(1) = 1,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = -1.$$

Ferner sei $z(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t))^T$. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Anfangswertprobleme zu dem obigen Problem äquivalent sind.

○ $z'(t) = (z_2(t), z_3(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(0) = (1, 2, -1)^T$.

⊗ $z'(t) = (z_2(t), z_3(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(1) = (1, 2, -1)^T$.

○ $z'(t) = (z_1(t), z_2(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(1) = (1, 2, -1)^T$.

○ $z'(t) = (z_2(t), z_3(t), -2\,z_3(t) + z_2(t)\,z_1^2(t) + \sin(t))^T$ mit $z(1) = (2, -1, 4)^T$.

MC 9. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann existiert in [a, b] genau eine Nullstelle von f.
- ○ Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann gilt zu dem Startwert $x_0 = a$ für alle Iterationswerte x_i des Newton-Verfahrens $x_i \geq a$.
- ⊗ Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ sowie $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt, dann bilden die Iterationswerte des Newton-Verfahrens zu $x_0 = b$ eine monoton fallende Folge.
- ○ Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, dann konvergiert die Bisektion stets schneller als das Sekantenverfahren, da sie den Einschluss der Nullstelle garantiert.

MC 10. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Das vereinfachte Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.
- ○ Das Bisektionsverfahren ist ein Fixpunktverfahren.
- ⊗ Das Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.
- ○ Das Sekanten-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.

MC 11. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^\star)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Dazu sei noch $\Phi(x) = 1/2 \cdot F(x)^T F(x)$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Das Gauß-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.
- ○ Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren auch lokale Maxima von Φ bestimmen.
- ○ Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren immer die lokalen Minima von Φ bestimmen.
- ⊗ Wenn $\|F(x^\star)\|_2 = 0$ ist, so hat das Gauß-Newton-Verfahren eine Konvergenzordnung $p > 1$.

MC 12. Seien $f \in C[a,b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ das Integral von f auf $[a,b]$. Ferner sei $Q(f) = \sum_{i=0}^m \omega_i f(x_i)$ eine Quadraturformel. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an.

- ⊗ Die absolute Kondition des Integrationsproblems $I(f)$ bzgl. der Maximumnorm ist gut.
- ○ Die relative Kondition des Integrationsproblems $I(f)$ bzgl. der Maximumnorm ist gut.
- ⊗ Falls die Quadraturformel exakt ist vom Grad n, dann gilt für alle $p \in \Pi_n$: $I(p) = Q(p)$.
- ○ Die Gewichte ω_i einer Quadraturformel sind immer positiv.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 3 & \beta & 0 \\ 0 & -1 & \gamma \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 3 \\ \delta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A für beliebige Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Pivotisieren Sie – wenn möglich – so, dass die Parameter nie *Pivotelemente* sind.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der LR-Zerlegung die Determinante von A.

c) Geben Sie für $\alpha = 1, \beta = 2$ und $\gamma = 3$ die Menge der Lösungen des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von δ an.

Teil a)

Vertausche 1. und 2. Zeile (verhindert Division durch Null für $\alpha = 0$):

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 3 & \beta & 0 \\ 0 & -1 & \gamma \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & \beta & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \gamma \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cc} 3 & \beta & 0 \\ \hline \frac{1}{3}\alpha & 1 - \frac{1}{3}\alpha\beta & 1 \\ 0 & -1 & \gamma \end{array}\right) \quad \textbf{(2)}$$

Vertausche 2. und 3. Zeile (verhindert Division durch Null für $\alpha\beta = 3$):

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cc} 3 & \beta & 0 \\ \hline 0 & -1 & \gamma \\ \frac{1}{3}\alpha & 1 - \frac{1}{3}\alpha\beta & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c|c} 3 & \beta & 0 \\ \hline 0 & -1 & \gamma \\ \hline \frac{1}{3}\alpha & -1 + \frac{1}{3}\alpha\beta & \gamma + 1 - \frac{1}{3}\gamma\alpha\beta \end{array}\right) \quad \textbf{(2)}$$

Insgesamt (**Bem:** P wird in der Praxis **nicht** aufgestellt; gespeichert wird der Indexvektor $\tilde{P}$):

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3}\alpha & -1 + \frac{1}{3}\alpha\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & \beta & 0 \\ 0 & -1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 + \gamma - \frac{1}{3}\gamma\alpha\beta \end{pmatrix}$$

Teil b)

$$L\,R = P\,A \Rightarrow \det(L)\,\det(R) = \det(P)\,\det(A) \Rightarrow \det(A) = \frac{\det(R)}{\det(P)} = (-1)^{\#\text{Zeilenvertauschungen}} \det(R)$$

$$\det(A) = (-1)^2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot (1 + \gamma - \tfrac{1}{3}\gamma\alpha\beta) = -3 - 3\gamma + \gamma\alpha\beta$$

(1)

Teil c)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Pb = \begin{pmatrix} b_{\tilde{P}_1} \\ b_{\tilde{P}_2} \\ b_{\tilde{P}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Setze $Rx = y$ und löse $Ly = Pb$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = \delta \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 3 - \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\delta \end{cases}$$

Löse $Rx = y$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & \delta \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\delta \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(\delta - 2 \cdot (4 - \frac{1}{2}\delta)) = \frac{2}{3}\delta - \frac{8}{3} \\ x_2 = -1 + 5 - \frac{3}{6}\delta = 4 - \frac{1}{2}\delta \\ x_3 = \frac{5}{3} - \frac{1}{6}\delta \end{cases}$$

Die Lösung lautet also:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\delta - \frac{8}{3} \\ 4 - \frac{1}{2}\delta \\ \frac{5}{3} - \frac{1}{6}\delta \end{pmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Gegeben seien Meßwerte

$$\begin{array}{c|cccc} t_i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f_i & 4 & 5 & 6 & 8 \end{array} \quad ,$$

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = \frac{1}{t-\alpha} + \beta\, t$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$ explizit auf (was ist x?, Meßwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß–Newton–Verfahren seien die Startwerte $\alpha_0 = 0.5$, $\beta_0 = 2$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? (Der erste Schritt muss nicht durchgeführt werden.)

c) Nach zwei Iterationen erhält man $\alpha_2 = 0.52323$ und $\beta_2 = 1.9396$. Berechnen Sie zu diesen Parameterwerten das Residuum.

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \\ 0 & 14 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Transformationen. Geben Sie x und das Residuum explizit an.

Teil a)

Die i-te Zeile der zu minimierenden Funktion $F(\alpha, \beta)$ lautet:

$$F_i(\alpha,\, \beta) := f(t_i) - f_i = \frac{1}{t_i - \alpha} + \beta\, t_i - f_i \ \ (= r_i).$$

Somit haben wir $||F(x)||_2 \to \min$ mit

$$F(x) = F(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\alpha} + 1\,\beta - 4 \\ \frac{1}{2-\alpha} + 2\,\beta - 5 \\ \frac{1}{3-\alpha} + 3\,\beta - 6 \\ \frac{1}{4-\alpha} + 4\,\beta - 8 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Teil b)

Die i-te Zeile von der Jakobimatrix J und rechten Seite $-r$ (Residuum):

$$\left(\frac{1}{(t_i - \alpha)^2} \qquad t_i \;\middle|\; f_i - \frac{1}{t_i - \alpha} - \beta\, t_i \right)$$

Nun setzen wir für α $\alpha_0 = 0.5$ und für β $\beta_0 = 2$ ein:

$$(J| - r) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & | & 0 \\ 0.4444 & 2 & | & 0.3333 \\ 0.16 & 3 & | & -0.4 \\ 0.08163 & 4 & | & -0.2857 \end{pmatrix}$$

Das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt lautet also:

$$\left\| J \cdot \begin{pmatrix} \Delta\alpha_0 \\ \Delta\beta_0 \end{pmatrix} - (-r) \right\|_2 \to \min \tag{2}$$

Teil c)

$$f(t) = \frac{1}{t - 0.52323} + 1.9396\ t \longrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{4} \left(f(t_i) - f_i\right)^2} = 0.49984 \qquad \textbf{(1)}$$

Teil d)
Es ist

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 3 & 7 & | & 0 \\ 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 14 & | & 1 \\ 4 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Wir nehmen für y die erste Spalte von A :

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \to \sigma = \|y\|_2^2 = 25,\ \alpha = \operatorname{sign}(y_1)\sqrt{\sigma} = 5 \overset{v_1 = y + \alpha}{\longrightarrow} v = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \to \beta = \frac{2}{v^T v} = \frac{1}{40}$$

Mit $h = v^T(A|b) = (40,\ 60,\ 0)$ und

$$\beta\, v = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir:

$$(A|b) - (\beta\, v_1)\, h = \begin{pmatrix} -5 & -5 & | & 0 \\ 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 14 & | & 1 \\ 0 & -5 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \left(A^{(1)}|b^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 2 & | & 0 \\ 14 & | & 1 \\ -5 & | & 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2)}$$

Und somit im nächsten Schritt

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} \to \sigma = \|y\|_2^2 = 225,\ \alpha = \operatorname{sign}(y_1)\sqrt{\sigma} = 15 \overset{v_1 = y_1 + \alpha}{\longrightarrow} v = \begin{pmatrix} 17 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} \to \beta = \frac{2}{v^T v} = \frac{1}{255}$$

Mit $h = v^T\left(A^{(1)}|b^{(1)}\right) = (255,\ 14)$ und

$$\beta\, v = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} \\ \frac{14}{255} \\ -\frac{1}{51} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.066667 \\ 0.054902 \\ -0.019608 \end{pmatrix}$$

erhalten wir:

$$\left(A^{(1)}|b^{(1)}\right) \to \begin{pmatrix} -15 & | & -\frac{14}{15} \\ 0 & | & \frac{59}{255} \\ 0 & | & \frac{14}{51} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & | & -0.93333 \\ 0 & | & 0.23137 \\ 0 & | & 0.27451 \end{pmatrix}$$

Und damit insgesamt

$$(A|b) \longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -5 & | & 0 \\ 0 & -15 & | & -\frac{14}{15} \\ 0 & 0 & | & \frac{59}{255} \\ 0 & 0 & | & \frac{14}{51} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2)}$$

Rückwärtseinsetzen liefert $x = (-14/225,\ 14/225) = (-0.062222, 0.062222)^T$ und das Residuum ist $\sqrt{29}/15 = 0.35901$. **(1)**

Bem.: Die jeweils erste Spalte muss in beiden Schritten nicht per Reflekion berechnet werden. Man weiß ja, dass dort ein Vielfaches des Einheitsvektors entsteht. Ist y_1 positiv, so ist es das $-\|y\|_2$-fache, sonst das $\|y\|_2$-fache.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gesucht ist eine Näherungslösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \ln(1+x_2) - 2x_1 &= 0 \\ \sin x_1 \cos x_2 - 4x_2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

in $D = [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{2}]$.

a) Leiten Sie eine Fixpunktiteration her, und zeigen Sie, dass diese den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt.

b) Führen Sie ausgehend von $x^{(0)} = (0,0)^T$ zwei Iterationsschritte durch und geben Sie eine möglichst genaue Fehlerabschätzung an.

c) Wieviele Iterationsschritte sind höchstens notwendig, um in der Maximumnorm eine Genauigkeit von 10^{-2} zu erreichen?

Teil a)

Die **Fixpunktgleichung** Φ ist gegeben durch (hier: teile durch möglichst große Werte):

$$\Phi(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln(1+x_2) \\ \frac{1}{4}\sin x_1 \cos x_2 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Selbstabbildung

$\frac{1}{2}\ln(1+x)$ ist monoton steigend, d.h. um die Selbstabbildung zu verifizieren genügt es, für Φ_1 die Ränder zu betrachten:

$$\frac{1}{2}\ln(1+0) = 0, \text{ und } \frac{1}{2}\ln(1+0.5) = 0.2027\ldots < 0.203 < 0.25$$

Außerdem gilt für Φ_2 wegen der Monotonie von sin und cos (die zudem auf D nur Werte aus $[0,1]$ liefern):

$$0 < \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}\sin x_1 \cos x_2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{16} < \frac{1}{2}$$

für alle $(x_1, x_2) \in D$ (dabei haben wir $\sin\left(\frac{1}{4}\right) < \frac{1}{4}$ benutzt). Also ist Φ selbstabbildend. **(1)**

Kontraktivität:

$$\Phi'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2(1+x_2)} \\ \frac{1}{4}\cos x_1 \cos x_2 & -\frac{1}{4}\sin x_1 \sin x_2 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für $x_2 > 0$ und somit natürlich auch für D: $||\Phi'(x_1, x_2)||_\infty \leq \frac{1}{2}$. Zusammen mit der Abgeschlossenheit und Konvexität von D folgt, dass Φ kontraktiv ist. **(2)**

Teil b)

1. Iterationsschritt:

$$\Phi(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln(1+0) \\ \frac{1}{4}\sin 0 \cos 0 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} =: x^{(1)} \qquad \textbf{(1)}$$

2. Iterationsschritt:

$$\Phi\left(x^{(1)}\right) = \Phi\left(0, \frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln(1+0.25) \\ \frac{1}{4}\sin 0 \cos 0.25 + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.11157 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} =: x^{(2)} \qquad \textbf{(1)}$$

A-posteriori Fehlerabschätzung:

$$||x^{(2)} - x^*||_\infty \leq \frac{L}{1-L}||x^{(2)} - x^{(1)}||_\infty = 0.11157 \text{ mit } L := \frac{1}{2} \text{ (siehe Teil a))} \qquad \textbf{(1)}$$

Teil c)

$$||x^{(k)} - x^*||_\infty \leq \frac{L^k}{1-L}||x^{(1)} - x^{(0)}||_\infty \leq 10^{-2} \text{ mit } L := \frac{1}{2} \text{ (siehe Teil a))}$$

Zur Erinnerung: Aus der a–priori Fehlerabschätzung

$$\frac{L^k}{1-L}\,||x^{(1)} - x^{(0)}|| \leq \varepsilon \Leftrightarrow L^k \leq \frac{\varepsilon\,(1-L)}{||x^{(1)} - x^{(0)}||}$$

folgt nach logarithmieren (**ACHTUNG:** $\ln L < 0$) die bekannte Formel

$$k \geq \frac{\ln\left(\dfrac{\varepsilon\,(1-L)}{||x^{(1)}-x^{(0)}||}\right)}{\ln L} \quad .$$

Hier:

$$k \geq \frac{\ln\left(\dfrac{10^{-2}\,(1-0.5)}{0.25}\right)}{\ln 0.5} = 5.6\ldots \qquad .$$

Es müssen 6 Iterationsschritte ausgeführt werden, um die gewünschte Genauigkeit zu garantieren. **(1)**

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	2	3	5
y_i	3	0	1	-2

a) Berechnen Sie die fünf fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

$$\begin{array}{l|ccccccc}
x_0 = 0 & 3 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1 = 2 & [\mathbf{x_1}]\mathbf{y} & \rightarrow & -\frac{3}{2} & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2 = 3 & 1 & \rightarrow & [\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]\mathbf{y} & \rightarrow & [\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]\mathbf{y} & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3 = 5 & -2 & \rightarrow & [\mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}]\mathbf{y} & \rightarrow & -\frac{5}{6} & \rightarrow & [\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}]\mathbf{y}
\end{array}$$

b) Stellen Sie das Interpolationspolynom $p_3(x)$ vom Grad 3 in Newton oder Horner-artiger Form auf.

c) Geben Sie eine Abschätzung für dem maximalen Fehler $|p_3(x) - y(x)|$ im **Intervall** $[2, 3]$ an.
Hinweis: Für die Ableitungen von y gelte $|y^{(3)}(x)| \leq 2.5$, $|y^{(4)}(x)| \leq 5$, $|y^{(5)}(x)| \leq 9$ $\forall x \in [0, 5]$.
Das Knotenpolynom hat Extremstellen bei $x_{E_{1,2}} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$ und $x_{E_3} = \frac{5}{2}$.

a) Newton-Schema:
Mit $[x_1]y = y_1$ und der Rekursionsformel

$$[x_i, ..., x_m]y = \frac{[x_{i+1}, ..., x_m]y - [x_i, ..., x_{m-1}]y}{x_m - x_i}$$

erhalten wir

$$\begin{array}{l|ccccccc}
x_0 = 0 & 3 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1 = 2 & \boxed{\mathbf{0}} & \rightarrow & -\frac{3}{2} & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2 = 3 & 1 & \rightarrow & \boxed{\mathbf{1}} & \rightarrow & \boxed{\mathbf{\frac{5}{6}}} & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3 = 5 & -2 & \rightarrow & \boxed{\mathbf{-\frac{3}{2}}} & \rightarrow & -\frac{5}{6} & \rightarrow & \boxed{\mathbf{-\frac{2}{6}}}
\end{array}$$

(3)

b) Interpolationspolynom in Horner-artiger Form:

$$p_3(x) = 3 + x \left\{ -\frac{3}{2} + (x-2) \left[\frac{5}{6} + (x-3) \left(-\frac{2}{6} \right) \right] \right\}.$$

Interpolationspolynom in Newton Form:

$$p_3(x) = 3 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{6}x(x-2) - \frac{2}{6}x(x-2)(x-3).$$

(1)

c)

An den Intervallrändern von $[2, 3]$ ist das Knotenpolynom $\omega(x)$ Null. Es liegt hier nur die Extremstelle $x_{E_3} = \frac{5}{2}$ im Intervall : $|\omega(x_{E_3})| = 1.5625$, also

$$\max_{x \in [2,3]} |p_3(x) - y(x)| \leq \max_{x \in [2,3]} |\omega(x)| \frac{1}{4!} \max_{\xi \in [0,5]} |y^{(4)}(\xi)| \leq 1.5625 \frac{1}{24} 5 = 0.325 \ldots < 0.33.$$

(2)

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Das Integral

$$I = \int_{-2}^{2} f(x)dx \qquad \text{mit} \quad f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2}$$

soll mit der summierten Trapezregel $T(h)$ und anschließender Romberg-Extrapolation zur Schrittweitenfolge $h_i := 4 \cdot 2^{-i}, i = 0, 1, 2, 3$ approximiert werden.

a) Bestimmen Sie die Werte $T_{2,0}$, $T_{3,2}$ und $T_{4,4}$, die im folgenden Romberg-Extrapolationsschema fehlen. (unterhalb der Aufgabenstellung)

$$\begin{array}{lllllllll}
T(h_0) = T_{0,0} = 0.001341851 & & & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & & & \\
T(h_1) = T_{1,0} = 2.000671 & \rightarrow & 2.667114 & & & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & & & & \\
T(h_2) = T_{2,0} = \boxed{\dots} & \rightarrow & 1.027784 & \rightarrow & 0.9184953 & & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
T(h_3) = T_{3,0} = 1.253143 & \rightarrow & 1.247189 & \rightarrow & \boxed{T_{3,2}} & \rightarrow & 1.267266 & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
T(h_4) = T_{4,0} = 1.253208 & \rightarrow & 1.253230 & \rightarrow & 1.253633 & \rightarrow & 1.253503 & \rightarrow & \boxed{T_{4,4}}
\end{array}$$

b) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für $T(h_4)$ an.
Hinweis: Für die Ableitungen des Integranden $f(x)$ gilt $f'(x) = -4x\mathrm{e}^{-2x^2}$, $f''(x) = (16x^2-4)\mathrm{e}^{-2x^2}$, $f'''(x) = (48x - 64x^3)\mathrm{e}^{-2x^2}$, $f^{(4)}(x) = (48 - 384x^2 + 256x^4)\mathrm{e}^{-2x^2}$.

c) Schätzen Sie den Fehler von T_{44}.

a) Erläuterungen, Punkte siehe unten

Zunächst berechnen wir den Wert $T(h_2) = T_{2,0}$. Alle Werte der 0-Spalte müssen mit der summierten Trapezregel berechnet werden. Allgemein ist diese für $h \cdot n = b - a$ gegeben durch

$$T(h) = h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) + \frac{f(b)}{2}\right).$$

Für den Integranden $f(x) = \mathrm{e}^{-2\,x^2}$ haben wir Achsensymmetrie, also $f(-x) = f(x)$. Da die Integrationsgrenzen $b = 2 = -a$ ($\rightarrow h_0 = 4$ und $h_2 = 1$) symmetrisch zum Ursprung liegen, haben wir hier

$$\begin{aligned}
T(h_2) &= 2 \cdot 1\left(\frac{f(0)}{2} + f(1) + \frac{f(2)}{2}\right) \\
&= 0.0003355 + 0.2706706 + 1 = 1.271006.
\end{aligned}$$

Allgemein lautet die Rekursionsformel des Romberg-Schemas

$$T_{i,j} = \frac{4^j T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^j - 1}, \quad i = j, j+1, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

$$T_{3,2} = \frac{16 \cdot T_{3,1} - T_{2,1}}{16 - 1} = \frac{16 \cdot 1.247189 - 1.027784}{15} = 1.261816$$

$$T_{4,4} = \frac{256 \cdot T_{4,3} - T_{3,3}}{256 - 1} = \frac{256 \cdot 1.253503 - 1.267266}{255} = 1.253449$$

Daraus ergibt sich das vollständige Tableau

$$
\begin{array}{lcccccccc}
T(h_0) = T_{0,0} = 0.001341851 & & & & & & & & \\
& \searrow & & & & & & & \\
T(h_1) = T_{1,0} = 2.000671 & \rightarrow & 2.667114 & & & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & & & & \\
T(h_2) = T_{2,0} = \boxed{\mathbf{1.271006}} & \rightarrow & 1.027784 & \rightarrow & 0.9184953 & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
T(h_3) = T_{3,0} = 1.253143 & \rightarrow & 1.247189 & \rightarrow & \boxed{\mathbf{1.261816}} & \rightarrow & 1.267266 & & \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
T(h_4) = T_{4,0} = 1.253208 & \rightarrow & 1.253230 & \rightarrow & 1.253633 & \rightarrow & 1.253503 & \rightarrow & \boxed{\mathbf{1.253449}}
\end{array}
$$

(2)

b)

Die Fehlerabschätzung für die summierte Trapezregel lautet

$$|T(h) - I| \leq \frac{h^2}{12}(b-a) \max_{z \in [a,b]} |f''(z)|.$$

Für die Fehlerabschätzung benötigen wir das Betragsmaximum der zweiten Ableitung. Die dritte Ableitung ist 0 für $x_1 = 0$ und $x_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(= \pm 0.866025404)$. $f''(x_1) = -4$, $f''(x_2) = f''(x_3) = 8\,e^{-3/2} = 1.7\ldots(1.7850413)$. Ränder: $f''(-2) = f''(2) = 0.02\ldots(0.020127758)$.
Also ist $\max\limits_{x \in [-2,2]} |f''(x)| = 4$. Damit gilt hier:

$$|T(h_4) - I| \leq \frac{0.25^2}{12} 4 \cdot 4 = \frac{1}{12} = 0.083\ldots < 0.1$$

(2)

c)

Der Fehler von $T_{4,4}$ läßt sich schätzen zu

$$|T_{4,4} - I| \lesssim |T_{4,4} - T_{4,3}| = |1.253449 - 1.253503| = 0.000054.$$

(1)