Verständnisfragen-Teil (24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Aussagen. Diese sind mit "wahr" bzw. "falsch" zu kennzeichnen (hinschreiben). Es müssen alle Fragen mit wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Sonst wird die Aufgabe als nicht bearbeitet gewertet, also mit 0 Punkten. Ist die Aufgabe komplett richtig beantwortet, so gibt es 2 Punkte, ansonsten 0 Punkte. Es können 0 bis 4 Antworten richtig sein!

Beantworten Sie ALLE Fragen mit wahr oder falsch!

VF-1:		
1.	Beim vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme muss im gesamten Verfahren nur eine LR-Zerlegung berechnet werden.	wahr
2.	Die Iterierten des eindimensionalen Newton-Verfahrens bilden, wenn das Verfahren konvergiert, stets eine monotone Folge.	falsch
3.	Es sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und x^* eine mehrfache Nullstelle von f. Dann konvergiert das Newton-Verfahren lokal quadratisch gegen x^*.	falsch
4.	Das Newton-Verfahren für Systeme kann man als eine Fixpunktiteration auffassen.	wahr

VF-2:		
1.	Sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Iterationsvorschrift und x^* ein Fixpunkt, d.h. $\Phi(x^*) = x^*$. Dann gilt: $\lvert\Phi'(x^*)\rvert < 1$.	falsch
2.	Es sei $\Phi(x)$ eine Funktion auf dem Intervall $[a, b]$, die die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Außerdem gilt $\Phi(x^*) = x^*$ für ein $x^* \in [a, b]$ mit $x^* \neq 0$. Dann konvergiert das Newtonverfahren, angewendet auf $\Phi(x)$ immer für alle Startwerte $x_0 \in [a, b]$ gegen x^*.	falsch
3.	Die Konvergenzordnung des Regula-Falsi-Verfahrens ist ungefähr 1.6.	falsch
4.	Das vereinfachte Newton-Verfahren ist global konvergent mit Konvergenzordnung 1.	falsch

VF-3: Gegeben seien die Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ mit $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschiedenen und $n \geq 3$, $a := \min\{x_0, \ldots, x_n\}$, $b := \max\{x_0, \ldots, x_n\}$ sowie $x \in \mathbb{R}$.		
1.	Das aus der Vorlesung bekannte Lagrange-Interpolationsproblem zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ ist stets eindeutig lösbar.	wahr
2.	Für beliebiges $f \in C^n[a, b]$, gilt: $$\max_{x\in[a,b]} \lvert f(x) - P(f\lvert x_0, \ldots, x_n)(x)\rvert \leq \max_{x\in[a,b]} \left\lvert \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j) \right\rvert \max_{x\in[a,b]} \frac{\lvert f^{(n)}(x)\rvert}{n!}$$	falsch
3.	Durch Erhöhung der Stützstellenzahl und der damit verbundenen Erhöhung des Polynomgrades erhält man beliebig gute Approximationen für die zu interpolierende Funktion (bezüglich der Norm $\lvert\lvert . \rvert\rvert_\infty$).	falsch
4.	Für $g(x) := 2x^n - \pi x^2$ gilt: $g(x) = P(g\lvert x_0, x_2, x_n)(x)$.	falsch

VF-4: Es seien $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.		
1.	Der Wert $[x_0, x_1, \ldots, x_n]f$ hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab.	wahr
2.	Für die Newton-Basispolynome (Knotenpolynome) ω_j gilt: $[x_0, \ldots x_k]\omega_j = \delta_{jk}$ für $j, k = 0, \ldots, n$.	wahr
3.	Der Rechenaufwand zur Berechnung der Koeffizienten in den Newtonschen Interpolationsformeln mit dem Schema der dividierten Differenzen beträgt $\frac{1}{2}n^2$ Divisionen und n^2 Subtraktionen.	wahr
4.	Für numerische Berechnungen ist die Darstellung des Polynomes in Potenzform (Normalform) stets geeignet.	falsch

VF-5: Es seien $f \in C[a,b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$. Ferner sei $Q(f) = \sum_{i=0}^m \omega_i\, f(x_i)$ eine Quadraturformel.		
1.	Die Gewichte der Gauß-Quadraturformeln sind immer größer Null.	wahr
2.	Die relative Kondition des Integrationsproblems $I(f)$ bzgl. der Maximumnorm ist gut.	falsch
3.	Falls die Quadraturformel $Q(f)$ exakt ist vom Grad $n+1$, dann gilt für alle $p \in \Pi_n$: $I(p) = Q(p)$.	wahr
4.	Die Stützstellen der Gauß-Quadraturformeln sind nicht unbedingt äquidistant.	wahr

VF-6: Es seien $m \geq 0$, $f \in C^{2m+2}[a,b]$ und $I(f) := \int_a^b f(x)dx$.		
1.	Es seien $Q_0(f)$ die berechnete Integralapproximation mittels der Mittelpunktsregel und $Q_1(f)$ die Approximation mittels der Trapezregel. Dann gilt für alle Funktionen $f \in C^2[a,b]$: $$\lvert Q_0(f) - I(f)\rvert \leq \lvert Q_1(f) - I(f)\rvert.$$	falsch
2.	Für die Newton-Cotes-Formeln $I_m(f)$ gilt: $$\lvert I(f) - I_m(f)\rvert \leq \frac{(b-a)^{m+2}}{(m+1)!}\lVert f^{(m+1)}\rVert_\infty$$	wahr
3.	Es seien $G_m(f)$ die berechnete Integralapproximation mit einer Gauß-Quadratur und $I_m(f)$ die Approximation mittels einer Newton-Cotes-Formel. Dann gilt für alle $f \in C^{2m+2}[a,b]$: $$\lvert G_m(f) - I(f)\rvert < \lvert I_m(f) - I(f)\rvert.$$	falsch
4.	Durch Extrapolation kann der Quadraturfehler verringert werden.	wahr

VF-7: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = x\, e^{4\,y^2}$. Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an. (Der relative Fehler der Eingabe wird bezüglich der 1-Norm gemessen.)		
1.	Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = 1 + 8\,y^2$.	falsch
2.	Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = \max(1, 8\,y^2)$.	wahr
3.	Das Problem ist schlecht konditioniert für $\lvert x\rvert \to \infty$.	falsch
4.	Das Problem ist gut konditioniert für $x^2 + y^2 \leq 0.1$.	wahr

VF-8: Gegeben sei eine nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.		
1.	Es existiert immer eine LR-Zerlegung von A mit $A = L\,R$.	falsch
2.	Der Rechenaufwand zur Berechnung der LR-Zerlegung über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung beträgt $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen.	falsch
3.	Die Inverse von A kann mittels LR-Zerlegung mit Pivotisierung in $\frac{4}{3}\,n^3$ Operationen berechnet werden.	wahr
4.	Falls A symmetrisch positiv definit ist, existiert immer eine LDL^T-Zerlegung von A.	wahr

VF-9: Gegeben seien eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für das zugehörige lineare Gleichungssystem $A\,x = b$:		
1.	Das Problem ist immer gut konditioniert.	falsch
2.	Bei Störung der Eingabedaten A und b wird der relative Fehler in der Lösung in Abhängigkeit vom relativen Eingabefehler maximal durch den Faktor $\kappa(A)$ verstärkt.	falsch
3.	Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann mit dem Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung stabil berechnet werden.	wahr
4.	Zeilenäquilibrierung verbessert immer die Kondition der Matrix A bezüglich der 2-Norm.	falsch

VF-10: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Least-Squares-Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems. Dann gilt:		
1.	x^* ist Lösung von $A^T A x^* = A^T b$.	wahr
2.	$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_1 = \|Ax^* - b\|_1$.	falsch
3.	x^* ist die eindeutige Lösung des linearen Ausgleichsproblems.	falsch
4.	Beim Lösen des linearen Ausgleichsproblems über die Normalgleichungen werden die entstehenden Rundungsfehler mit $\kappa_2(A^T A)$ verstärkt.	wahr

VF-11: Es seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen nichtlinearen Ausgleichsproblems $\|F(x)\|_2 \to \min$ sowie $\phi(x) := \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$. Dann gilt:		
1.	$\phi(x^*) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \phi(x)$.	wahr
2.	Die Gauß-Newton-Methode zur Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems kann als Fixpunktiteration geschrieben werden mit der Iterationsfunktion $\mathbf{\Phi}(x) := x - \big(F'(x)^T F'(x)\big)^{-1} \nabla\phi(x)$.	wahr
3.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, dann konvergiert sie lokal quadratisch.	falsch
4.	Lokale Maxima und Sattelpunkte sind für die Gauß-Newton-Methode abstoßend.	wahr

VF-12: Es sei $y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))$, $t > t_0$, eine explizit gegebene gewöhnliche Differentialgleichung m-ter Ordnung mit den Anfangsbedingungen $y^{(i)}(t_0) = y_i$, $i = 0, \ldots, m-1$. Dann gilt:		
1.	Falls $m = 1$ ist, dann löst $y(t)$ das Anfangswertproblem genau dann, wenn $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$.	wahr
2.	Jede gewöhnliche Differentialgleichnung höherer Ordnung in obiger Form kann als ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung geschrieben werden.	wahr
3.	Das obige Anfangswertproblem hat eine eindeutige Lösung.	falsch
4.	Sei $z_1(t), \ldots, z_m(t)$ Lösung des Anfangswertproblems $z_1'(t) = z_2(t), \ldots, z_{m-1}'(t) = z_m(t)$, $z_m'(t) = f(t, z_1(t), \ldots, z_{m-1}(t))$ mit $z_1(t_0) = y_0, \ldots, z_m(t_0) = y_{m-1}$. Dann gilt $z_1(t) = y(t)$.	wahr

Aufgabe 1 (3 + 4 = 7 Punkte)
Gegeben sind das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.1111 & 0.1429 \\ 0.1429 & 0.1847 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0.1194 \\ 0.1540 \end{pmatrix} \quad ,$$

die Inverse von A und die L-R-Zerlegung von A in 4-stellige Gleitpunktarithmetik

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1851.4 & -1432.4 \\ -1432.4 & 1113.7 \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1.286 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 0.1111 & 0.1429 \\ 0 & 0.0009 \end{pmatrix}.$$

Alle Werte in A und b resultieren aus Messungen und sind mit einem absoluten Fehler von maximal 0.00015 behaftet.

a) Mit welchem relativen Fehler (gemessen in der 1-Norm) müssen Sie bei der Lösung x des Gleichungssystems rechnen?

b) Verwenden Sie die gegebene L-R-Zerlegung zur Lösung des obigen Gleichungssystems.
Führen Sie anschließend einen Nachiterationsschritt aus und **benutzen Sie dabei zur Vereinfachung den Startvektor** $x_0 = (0.4,\, 0.5)^T$**!**

Teil a)

$$r_x \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \cdot r_A} (r_A + r_b) \quad \text{falls:} \;\; \kappa(A)\, r_A < 1$$

$$\|A\|_1 = 0.3276 \;\; , \;\; \|A^{-1}\|_1 = 3283.8 \rightarrow \kappa_1(A) = 1075.8$$

$$\|\Delta A\|_1 \leq 0.0003 \rightarrow r_{A1} \leq 0.00091575 \rightarrow \kappa_1(A) \cdot r_{A1} \leq 0.98514$$

$$\|\Delta b\|_1 \leq 0.0003 \rightarrow r_{b1} \leq \frac{0.0030}{0.1194 + 0.1540} = 0.0010973$$

$$r_x \leq \frac{1075.8}{1 - 0.98514} (0.00091575 + 0.0010973) \approx 146$$

(3)

Teil b)
Die Rechenschritte hier sind 10-stellig durchgeführt, die Zwischenergebnisse auf 5 Stellen gerundet.
Vorwärtseinsetzen ($L \cdot y = b$):

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.1194 \\ y_2 &= 0.1540 - 1.286 \cdot 0.1194 = 0.0004516 \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen ($R \cdot x = y$)

$$x_2 = \frac{0.0004516}{0.0009} = 0.50178$$

$$x_1 = \frac{0.1194 - 0.1429 \cdot 0.50178}{0.1111} = 0.42930$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.42930 \\ 0.50178 \end{pmatrix}$$

Residuenvektor doppelt genau (hat wegen des Startwerts $\mathbf{x}_0 = (0.4, 0.5)^T$ aber keine Auswirkung):

$$r_0 = b - A \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 0.00351 \\ 0.00449 \end{pmatrix}$$

Vorwärtseinsetzen ($L \cdot y = r$):

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.00351 \\ y_2 &= 0.00449 - 1.286 \cdot 0.00351 = -0.2386 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen ($R \cdot \Delta x = y$)

$$\Delta x_2 = \frac{-0.2386 \cdot 10^{-4}}{0.0009} = -0.026511$$

$$\Delta x_1 = \frac{0.00351 - 0.1429 \cdot (-0.026511)}{0.1111} = 0.065692$$

Korrektur:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.465692 \\ 0.473489 \end{pmatrix}$$

(4)

Aufgabe 2 (1 + 5 = 6 Punkte)

Gegeben sind die vier Messwerte

t_i	-1	0	1	2
y_i	0	0	4	11

,

die der Theorie nach zu einer Funktion der Form

$$y(t) = \alpha\, t^2 + \beta\, \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|A\,x - b\|_2 \to \min$ auf. Geben Sie A, b und x explizit an.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem ausnahmsweise mittels der Normalgleichungen. Geben Sie die Lösung $y(t)$ sowie das Residuum explizit an.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

(1)

b) Für die Normalgleichungen $\left(A^T A\,x = A^T b\right)$ berechnet man

$$A^T A = \begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^T b = \begin{pmatrix} 48 \\ 13.8284 \end{pmatrix} \to \left(A^T A | A^T b\right) = \begin{pmatrix} 18 & 4 & | & 48 \\ 4 & 2 & | & 13.8284 \end{pmatrix}$$

Eliminieren und Rückwärtseinsetzen liefert dann

$$\to \begin{pmatrix} 18 & 4 & | & 48 \\ 0 & 1.11111 & | & 3.16176 \end{pmatrix} \to x = \begin{pmatrix} 2.0343 \\ 2.8456 \end{pmatrix}$$

Und somit: $y(t) = 2.0343\, t^2 + 2.8456\, \sin\left(\frac{\pi}{4}\, t\right)$.

Das Residuum ist

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3} (y(t_i) - y_i)^2} = (\|A\,x - b\|_2 =) \sqrt{0.022183^2 + 0 + 0.046447^2 + (-0.017157)^2} = 0.054256$$

(5)

Aufgabe 3 (2 + 7 = 9 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{y^2}{6} + y &= 9 \\ x + y^2 &= 7 \end{aligned}$$

sollen iterativ mit den Newton- und vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete ganzzahlige Startwerte an.

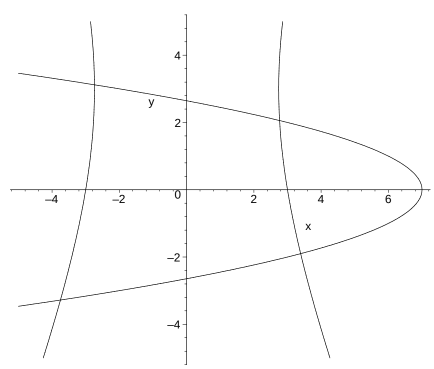
b) Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 2. Quadranten für beide Verfahren

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} ,$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.

Bem.: Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.

Teil a) Skizze (Parabel $x = 7 - y^2$ und Hyperbel (z.B.): $y = 0 \leftrightarrow x = \pm 3$, $y = 3 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{7.5}$ und $y = -3 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{13.5}$). Zu skizzieren ist der gesamte Bereich:



Ganzzahlige Startwerte: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ **(2)**

Teil b)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - 1/6 \cdot y^2 + y - 9 \\ x + y^2 - 7 \end{pmatrix} \to f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \cdot x & -1/3 \cdot y + 1 \\ 1 & 2 \cdot y \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -6 & 0 & | & -1.5 \\ 1 & 6 & | & 1 \end{pmatrix} \to \Delta\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.125 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2.75 \\ 3.125 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2.75 \\ 3.125 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5.5 & -0.041666667 & | & -0.059895833 \\ 1 & 6.25 & | & -0.015625 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -5.5 & -0.041666667 & | & -0.059895833 \\ 0 & 6.242424242 & | & -0.02651515145 \end{pmatrix} \to \Delta\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.01092233004 \\ -0.004247572805 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2.73907767 \\ 3.120752427 \end{pmatrix}$$

(5)

Vereinfachtes Newton-Verfahren (erster Schritt und $f(\mathbf{x}_1)$ vom Newton-Verfahren):

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -2.75 \\ 3.125 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -6 & 0 & | & -0.0598958 \\ 1 & 6 & | & -0.015625 \end{pmatrix} \to \Delta\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.00998264 \\ -0.00426794 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2.74002 \\ 3.12073 \end{pmatrix}$$

(2)

Aufgabe 4 (2 + 3 = 5 Punkte)

Eine unbekannte Funktion $f(x)$ soll interpoliert werden. Gegeben ist folgende Tabelle:

x	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25	2.75
$f(x)$	1.0314	1.2947	1.8884	2.9642	4.7966	7.8533

.

a) Gesucht ist ein Näherungswert für $f(1.0)$ mit dem Neville–Aitken–Schema unter Benutzung aller Tabellenwerte. Ergänzen Sie dazu das folgende Tableau:

$$
\begin{array}{l|lllllllllll}
x_0 = 0.25 & 1.0314 & & & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & & & \\
x_1 = 0.75 & 1.2947 & \rightarrow & 1.42632 & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & & & \\
x_2 = 1.25 & P_{2,0} & \rightarrow & 1.59155 & \rightarrow & 1.55025 & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_3 = 1.75 & 2.9642 & \rightarrow & 1.35054 & \rightarrow & P_{3,2} & \rightarrow & 1.54077 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_4 = 2.25 & 4.7966 & \rightarrow & P_{4,1} & \rightarrow & 1.63427 & \rightarrow & 1.54846 & \rightarrow & 1.54366 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_5 = 2.75 & 7.8533 & \rightarrow & \text{-}2.84521 & \rightarrow & 2.51124 & \rightarrow & P_{5,3} & \rightarrow & 1.54092 & \rightarrow & P_{5,5}
\end{array}
.
$$

b) Von der i-ten Ableitung weiß man, dass $|f^{(i)}(x)| \leq i\,|x\,(x-3)| + 3$ ist. Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für $P_{5,5}$ an.

Teil a) Das Neville–Aitken-Schema ist rekursiv definiert durch

$$
\begin{aligned}
P_{i,0} &= f(x_i), \qquad 0 \leq i \leq n, \\
P_{i,k} &= \frac{x - x_{i-k}}{x_i - x_{i-k}}\, P_{i,k-1} + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-k}}\, P_{i-1,k-1} \\
&= P_{i,\quad k-1} + \frac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}}\,(x - x_i) \\
&= P_{i-1,k-1} + \frac{P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}}\,(x - x_{i-k}), \qquad 0 \leq k \leq i \leq n.
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für die geforderten Werte mit $x = 1.0$

$$
\begin{aligned}
P_{2,0} &= f(x_2) \;=\; 1.8884, \\
P_{4,1} &= P_{3,0} + \frac{P_{4,0} - P_{3,0}}{x_4 - x_3}\,(x - x_3) \;=\; 0.215600, \\
P_{3,2} &= P_{2,1} + \frac{P_{3,1} - P_{2,1}}{x_3 - x_1}\,(x - x_1) \;=\; 1.53130, \\
P_{5,3} &= P_{4,2} + \frac{P_{5,2} - P_{4,2}}{x_5 - x_2}\,(x - x_2) \;=\; 1.48811, \\
P_{5,5} &= P_{4,4} + \frac{P_{5,4} - P_{4,4}}{x_5 - x_0}\,(x - x_0) \;=\; 1.54284.
\end{aligned}
$$

(2)

Teil b) Die Werte $P_{i,k}$ beruhen auf Polynomen k–ten Grades, somit hat das dem Wert $P_{5,5}$ zu Grunde liegende Polynom p_5 den Grad 5.

$$
\begin{aligned}
|f(1) - p_5(1)| &\leq \tfrac{1}{6!} \max\nolimits_{\xi \in [0.25, 2.75]} |f^{(6)}(\xi)| \prod\nolimits_{i=0}^{5} |1 - x_i| \\
&\leq \tfrac{1}{720} \cdot \left(6 \cdot 1.5^2 + 3\right) \cdot 0.25^2\, 0.75^2\, 1.25\, 1.75 \\
&= \tfrac{1}{720} \cdot \qquad 16.5 \qquad \cdot \qquad 0.0769043 \qquad = 0.00176239 \leq 1.8\, 10^{-3}
\end{aligned}
$$

(3)

Aufgabe 5 (3 + 4 + 2 = 9 Punkte)

Zur Bestimmung des Integrals $I = \int_a^b f(x)\,dx$ sei folgende Quadraturformel mit 2 Stützstellen gegeben ($H = b - a$):

$$I \approx I_2(f) = \frac{H}{2}\left[f\left(a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) H\right) + f\left(a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) H\right)\right]. \tag{1}$$

Der Fehler dieser Formel ist gegeben durch

$$E_2(f) = I - I_2(f) = \frac{H^5}{4320} f^{(4)}(z), \qquad z \in (a,b). \tag{2}$$

Nun sollen mit obiger Formel Näherungen für

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx \tag{3}$$

berechnet werden.

a) Leiten Sie für die Quadraturformel (1) die summierte Formel für n Teilintervalle mit der Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$ her, und geben Sie für diese eine Fehlerabschätzung unter Benutzung von (2) an.

b) Wenden Sie die summierte Formel aus a) auf (3) mit $n = 2$ an und schätzen Sie den Fehler ab.

c) Wie viele Teilintervalle sind erforderlich, um mit der in a) aufgestellten Formel das Integral (3) bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$ zu bestimmen?

Teil a) Auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ mit $x_i = a + i\,h$, $h = \frac{b-a}{n}$, lautet die Quadraturformel (1)

$$\frac{h}{2}\left[f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h \;-\; \frac{\sqrt{3}\,h}{6}\right) + f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h \;+\; \frac{\sqrt{3}\,h}{6}\right)\right].$$

Wir setzen

$$m_i := a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h \quad\text{und}\quad \tilde{h} := \frac{\sqrt{3}\,h}{6}.$$

Damit ergibt sich aufsummiert für alle Intervalle $i = 0, 1, \ldots, n-1$

$$I_2^{sum}(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(m_i - \tilde{h}) + f(m_i + \tilde{h}) \right). \tag{4}$$

Für den Fehler gilt auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$

$$\frac{h^5}{4320} f^{(4)}(\xi_i), \qquad \xi_i \in (x_i, x_{i+1}),$$

also aufsummiert (vgl. Folien für Dozenten K10 p4,p5 und p11,p12 sowie Übungen Woche 12 und 13 Aufgabe 8.4) mit $M_4 := \max_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)|$

$$|E_2^{sum}(f)| \le n\,\frac{h^5}{4320}\,M_4 = \frac{b-a}{4320} \cdot h^4 \cdot M_4 \quad \left(= \frac{(b-a)^5}{4320} \cdot \frac{1}{n^4} \cdot M_4 \right). \tag{5}$$

(3)

Teil b) (**Bem.:** Wenn man die Formel (4) nicht herleiten konnte, kann (1) auf die Intervalle $[0, 0.5]$ und $[0.5, 1]$ anwenden und die Werte summieren.)

Nun ist

$$f(x) = \ln(1+x), \qquad a = 0, \qquad b = 1, \qquad n = 2 \quad\text{und somit}\qquad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}.$$

Das ergibt die Zwischenstellen $m_0 = a + 0.5\,h = 0.25$ und $m_1 = a + 1.5\,h = 0.75$ sowie $\tilde{h} = \sqrt{3}\;0.5\,/\,6 = 0.1443375673$. Also

$$I_2^{sum}(f) = \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right) + \ln\left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right) + \ln\left(\frac{7}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right) + \ln\left(\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right)\right) = 0.3863174234$$

Für die Fehlerabschätzung (auch hierfür braucht man die summierte Formel nicht) berechnen wir die Ableitungen von f:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)}, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4},$$

Der Betrag der 4. Ableitung ist auf $[0,1]$ positiv und streng monoton fallend; er nimmt daher sein Maximum am linken Intervallrand an, also

$$M_4 = |f^{(4)}(0)| = 6.$$

Eingesetzt in (5) ergibt sich daher

$$|E_2^{sum}(f)| \leq \frac{1-0}{4320} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 6 \approx 0.868 \cdot 10^{-4}.$$

Das Ergebnis ist damit auf 4 Stellen genau.

(4)

Teil c) Für den Fehler gilt gemäß (5)

$$|E_2^{sum}(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{4320} \cdot \frac{1}{n^4} \cdot M_4 \overset{!}{\leq} \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}.$$

Aufgelöst nach n ergibt sich

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5\, M_4}{4320\,\varepsilon}} = \sqrt[4]{\frac{6}{4320 \cdot 0.5}\, 10^6} = 7.2\ldots,$$

also aufgerundet

$$n \geq 8.$$

(2)