Verständnisfragen-Teil (24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit “wahr” bzw. “falsch” zu kennzeichnen (hinschreiben). Es müssen mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Sonst wird die Aufgabe als nicht bearbeitet gewertet, also mit 0 Punkten. Das ist auch der Fall, wenn eine Teilaufgabe falsch ist. Ansonsten gibt es für jede richtige Teilaufgabe 0.5 Punkte.

Beantworten Sie mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!

Original

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.		
1.	In $\mathbb{M}(4,6,-2,8)$ gilt: $x_{\text{MIN}} = 0.015625$	wahr
2.	In $\mathbb{M}(10,6,-5,5)$ gilt: $x_{\text{MAX}} = 9.99 \cdot 10^4$	falsch
3.	Es gilt $\lvert\text{fl}(x) - x\rvert \leq \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	falsch
4.	Die Zahl 16.5 ist in $\mathbb{M}(2,8,-8,8)$ exakt darstellbar.	wahr

VF-2:		
1.	Je besser die Kondition eines Problems, desto stabiler sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems.	falsch
2.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler in der selben Größenordnung wie der Eingabefehler.	falsch
3.	Die Funktion $f(x,y) = x - y$ ist gut konditioniert für alle $x > 0,\ y < 0$.	wahr
4.	Die Funktion $f(x,y) = (x^3 - 1)\sin y$ ist in der Nähe von $(1,1)$ gut konditioniert.	falsch

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Es sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Es gilt $\kappa(A) = \kappa(A^{-1})$.	wahr
2.	Es sei $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $A\tilde{x} = \tilde{b}$ und $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A bezüglich $\\|\cdot\\|$. Es gilt $\\|\tilde{x} - x\\| \leq \kappa(A)\\|\tilde{b} - b\\|$.	falsch
3.	Zu A existiert eine eindeutige Zerlegung $A = LR$.	falsch
4.	Das Lösen des Gleichungssystems über LR-Zerlegung ohne Pivotisierung aber mit Zeilenäquilibrierung ist ein stabiles Verfahren.	falsch

VF-4: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.		
1.	Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.	wahr
2.	Das Givens-Verfahren zur Berechnung einer QR-Zerlegung von A ist ohne Pivotisierung nicht stabil.	falsch
3.	Die einzelnen Schritte des Householder-Algorithmus zur QR-Zerlegung von A lassen sich geometrisch als Spiegelungen interpretieren.	wahr
4.	Die Householder-Transformation wird durch eine symmetrische Matrix beschrieben.	wahr

VF-5: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$, $Rang(A) = n$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems.		
1.	x^* ist Lösung von $A^TAx^* = A^Tb$.	wahr
2.	Die Matrix A^TA ist symmetrisch positiv definit.	wahr
3.	Der Vektor $Ax^* - b$ steht senkrecht auf Ax^*.	wahr
4.	Sei $\tilde{x}^*$ die Lösung des linearen Ausgleichsproblems bei gestörten Daten $\tilde{b}$. Für die Kondition des linearen Ausgleichsproblems bezüglich Störungen in b gilt: $\frac{\\|\tilde{x}^*-x^*\\|_2}{\\|x^*\\|_2} \leq \kappa_2(A)^2 \frac{\\|\tilde{b}-b\\|_2}{\\|b\\|_2}$.	falsch

VF-6: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit vollem Rang und $m > n$, eine QR-Zerlegung $A = QR$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Es seien $Q^TA = R := \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Q^Tb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{(m-n)}$. Sei x^* die Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichproblems.		
1.	Es gilt $\det R \neq 0$.	falsch
2.	Das Residuum des zugehörigen linearen Ausgleichproblems ist $\\|b_1\\|_2$.	falsch
3.	Es gilt $\\|Ax - b\\|_2 = \\|Rx - Q^Tb\\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	wahr
4.	Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems ist gegeben durch $x^* = R^{-1}Q^Tb$.	falsch

VF-7: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung und $E \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge sowie $x_0 \in E$.		
1.	Es seien $\max_{x\in E} \\|\Phi'(x)\\| \leq L$ für $L \in \mathbb{R}$ und $\Phi(E) \subset E$. Die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ konvergiert dann gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* = \Phi(x^*)$.	falsch
2.	Es seien $\max_{x\in E} \\|\Phi'(x)\\| = M > 1$ und $\Phi(E) \subset E$. Dann divergiert die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k)$.	falsch
3.	Es seien $n = 1$ und E ein Intervall. Weiter seien $\max_{x\in E} \lvert\Phi'(x)\rvert < 1$ und $\Phi(E) \subset E$. Die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ konvergiert dann gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* = \Phi(x^*)$ in E.	wahr
4.	Es seien $\\|\Phi(x) - \Phi(y)\\| \leq L\\|x - y\\|$ für alle $x, y \in E$ und $L \in [0, 1)$ sowie $\Phi(E) \subset E$. Die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ konvergiert dann gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* = \Phi(x^*)$ in E.	wahr

VF-8: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^* mit $f(x^*) = 0$. Wir betrachten das Newton-Verfahren.		
1.	Es sei $f(x) := 2x^3 - 1$. Die Newton-Iteration zur Berechnung einer Nullstelle von f lautet: $x_{k+1} := x_k - \frac{1}{3} \cdot \frac{x_k^3-1}{x_k^2}$.	falsch
2.	Es sei $f(x) := x^4 - 2$. Die Newton-Iteration zur Berechnung einer Nullstelle von f lautet: $x_{k+1} := \frac{3}{4}x_k - \frac{1}{x_k^3}$.	falsch
3.	Das Newton-Verfahren lässt sich als Fixpunktverfahren interpretieren.	wahr
4.	Der Näherungswert x_{k+1} ist die Nullstelle der Tangente an f im Punkt $(x_k, f(x_k))$.	wahr

VF-9: Es sei eine nichtlineare Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben.		
1.	Das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem lautet: Finde x^* mit $\|F(x^*) - x^*\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x) - x\|_2$.	falsch
2.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren wählt man den Dämpfungsparameter abhängig vom Verhältnis der Änderung im nichtlinearen Residuum zur Änderung des Residuums des linearen Modells.	wahr
3.	Das Gauss-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.	wahr
4.	Das Gauss-Newton-Verfahren liefert für beliebige Startwerte eine Lösung des zugehörigen nichtlinearen Ausgleichsproblems.	falsch

VF-10: Es sei $\Pi_n = \left\{\sum_{j=0}^n a_j x^j \| a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n. Ferner sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$.		
1.	Die Lagrange-Fundamentalpolynome $l_{jn}(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$, $0 \le j \le n$ bilden eine Basis von Π_n.	wahr
2.	Die Lagrange-Fundamentalpolynome zur Darstellung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ sind gerade so konstruiert, dass gilt: $l_{jn}(x_i) = \delta_{ji}, \quad i, j = 0, \dots, n$. (Hinweis: $\delta_{ij} = 0$ falls $i \neq j$, $\delta_{jj} = 1$)	wahr
3.	$\left\{a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_{n-1} x^{n-1}\right\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	falsch
4.	Für ein festes $\bar{x}$ ist die Auswertung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema als auch mittels Newton-Schema und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n^2)$.	wahr

VF-11: Es sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$.		
1.	Die Bestimmung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ mit dem Newton-Schema und mittels eines linearen Gleichungssystems (Vandermonde-Matrix) führt zum gleichen Polynom $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$.	wahr
2.	Die Bestimmung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ mittels eines linearen Gleichungssystems (Vandermonde-Matrix) ist stets effizienter als die Verwendung des Newton-Schemas.	falsch
3.	$P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ kann mit Hilfe der Lagrange-Fundamentalpolynome bestimmt werden.	wahr
4.	Falls es sich bei der Funktion f um ein Polynom vom Grad $\le$ n handelt, dann gilt stets $f(x) = P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x)$.	wahr

VF-12: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ werde durch eine Newton-Cotes-Formel $I_m(f)$ zu äquidistanten Stützstellen $a \le x_0 < \dots < x_m \le b$ approximiert.		
1.	$I_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_{m+2}$.	falsch
2.	Es gilt $I_m(f) = \int_a^b P(f \mid x_0, \dots, x_m)(x)\, dx$.	wahr
3.	Falls $f \in C^{m+1}[a, b]$, dann gilt für den Fehler $\|I(f) - I_m(f)\| \le \frac{(b-a)^{m+2}}{(m+1)!} \max_{x\in[a,b]} \|f^{(m+1)}(x)\|$.	wahr
4.	Newton-Cotes-Formeln höherer Ordnung können aufgrund von Auslöschung instabil sein.	wahr

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie eine Zeilenskalierung von A durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix D (mit skalierter Matrix $B := DA$) explizit an.

b) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von B mit Spaltenpivotisierung, d. h. $PB = LR$. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

c) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A. Verwenden Sie hierzu die LR-Zerlegung aus den vorherigen Aufgabenteilen. (Achtung: Andere Lösungswege werden mit 0 Punkten bewertet.)

a) Zeilenäquilibrierung:

$$D = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad B := DA = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.4 & 0.4 \\ 0.4 & -0.3 & 0.3 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

(1)

Bem.: Die Einträge von D werden in der Praxis als Vektor gespeichert.

b) LR-Zerlegung:

$$B \overset{\text{Pivot}(3,2,1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & -0.3 & 0.3 \\ 0.2 & -0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|cc} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ \hline 0.5 & -0.35 & 0.25 \\ 0.25 & -0.425 & 0.375 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{Pivot}(3,1,2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|cc} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ \hline 0.25 & -0.425 & 0.375 \\ 0.5 & -0.35 & 0.25 \end{array}\right) \overset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|c|c} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ \hline 0.25 & -0.425 & 0.375 \\ \cline{2-2} 0.5 & 0.82353 & -0.058824 \end{array}\right)$$

$$\text{also:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.82353 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & -0.425 & 0.375 \\ 0 & 0 & -0.058824 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Matrix P wird in der Praxis nie aufgestellt.

(4)

c) Determinante von A:

Da $PDA = LR \Leftrightarrow A = D^{-1}P^{-1}LR$ ist, gilt für die Determinante von A:

$$det(A) = det(D^{-1})\, det(P^{-1})\, det(L)\, det(R)$$

Hinweis: $det(P^{-1}) = (-1)^{\#Zeilenvertauschungen}$

$$\det(A) = \frac{1}{0.2 \cdot 0.1 \cdot 0.1} \cdot (-1)^2 \cdot 1 \cdot (0.8 \cdot (-0.425) \cdot (-0.058824)) = 10$$

(1)

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben seien Messwerte

t_i	-1	1	2
f_i	1	7.4	20.1

,

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = e^{at+b}$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$ explizit auf (Messwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß–Newton–Verfahren seien die Startwerte $a_0 = 0.75$, $b_0 = 0.25$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? (Der erste Schritt muss nicht durchgeführt werden.)

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Transformationen. Geben Sie die Lösung x und das Residuum explizit an.

Teil a)

Die i-te Zeile der zu minimierenden Funktion $F(a,b)$ lautet:

$$F_i := f(t_i) - f_i = e^{at_i+b} - f_i \quad (= r_i).$$

Somit haben wir: Gesucht ist $x^\star$ mit $||F(x^\star)||_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} ||F(x)||_2$ mit

$$x = (a,b) \qquad \text{und} \qquad F(x) = F(a,b) = \begin{pmatrix} e^{(-1)\cdot a+b} - 1 \\ e^{1\cdot a+b} - 7.4 \\ e^{2\cdot a+b} - 20.1 \end{pmatrix}$$

(1)

Teil b)

Die i-te Zeile von der Jakobimatrix J und rechten Seite $-r$ (Residuum):

$$\begin{pmatrix} t_i e^{at_i+b} & e^{at_i+b} & | & f_i - e^{at_i+b} \end{pmatrix}$$

Nun setzen wir für a den Wert $a_0 = 0.75$ und für b den Wert $b_0 = 0.25$ ein:

$$(J|-r) = \begin{pmatrix} -0.606531 & 0.606531 & | & 0.393469 \\ 2.71828 & 2.71828 & | & 4.68172 \\ 11.5092 & 5.7546 & | & 14.3454 \end{pmatrix}$$

Das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt lautet also:

$$\left\| J \cdot \begin{pmatrix} \Delta a_0 \\ \Delta b_0 \end{pmatrix} - (-r) \right\|_2 \to \min \qquad \left(\longrightarrow \begin{pmatrix} \Delta a_0 \\ \Delta b_0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta a_0 \\ \Delta b_0 \end{pmatrix}$$

(2)

Teil c)
Es ist

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & | & 1 \\ 4 & 2 & | & 0 \\ 4 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen für y die erste Spalte von A,

$$y = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \to \sigma = \|y\|_2^2 = 100,\ \alpha = \mathrm{sign}(y_1)\sqrt{\sigma} = 10 \overset{v_1 = y_1 + \alpha}{\longrightarrow} v = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \to \beta = \frac{2}{v^T v} = \frac{1}{180}$$

Mit $h = \beta\, v^T a_{\cdot,2} = 1/180\,(18\ \ 4\ \ 4\ \ 2)\,(0\ \ 2\ \ 2\ \ 1)^T = 18/180 = 1/10 = \beta\, v^T\, b$ brauchen wir für die erste Transformation nur $(0\ 2\ 2\ 1)^T - h\,v$ und $b - h\,v$ zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - h\,v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9/5 \\ 8/5 \\ 8/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - h\,v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 18 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}.$$

Und somit

$$(A|b) \to \left(A^{(1)}|b^{(1)}\right) \begin{pmatrix} -10 & -9/5 & | & -4/5 \\ 0 & 8/5 & | & -2/5 \\ 0 & 8/5 & | & -2/5 \\ 0 & 4/5 & | & -1/5 \end{pmatrix} \qquad \left(a_{11}^{(1)} = -\alpha\right).$$

(2)

Für den zweiten Schritt müssen wir

$$\alpha = \mathrm{sign}\left(\frac{8}{5}\right) \left\| \begin{pmatrix} 8/5 \\ 8/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \right\|_2 = \frac{\sqrt{64 + 64 + 16}}{5} = \frac{\sqrt{144}}{5} = \frac{12}{5} \overset{v_1 = y_1 + \alpha}{\longrightarrow} v = \begin{pmatrix} 4 \\ 8/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \to \beta = \frac{2}{v^T v} = \frac{5}{48}$$

berechnen. Daraus folgt mit $h = \beta\, v^T \tilde{b}_2 = 5/48\,(20/5\ 8/5\ 4/5)\,(-2/5\ \ -2/5\ \ -1/5)^T = 5/48 \cdot (-12/5) = -1/4$:

$$\begin{pmatrix} -2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} - h\,v = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 8/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(= \ (b^{(2)}) \right).$$

$$\left(A^{(1)}|b^{(1)}\right) \to \begin{pmatrix} -10 & -9/5 & | & -4/5 \\ 0 & -12/5 & | & 3/5 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

(2)

Rückwärtseinsetzen liefert $x = (\frac{1}{8}, -\frac{1}{4})^T$ und das Residuum ist 0. **(1)**

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 2\,x^2 + y^2 - 18 &= 0 \\ 2\,x\,y + 3\,y - 7 &= 0 \end{aligned}$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage der Lösung(en) im 1. Quadranten verdeutlicht und bestimmen Sie daraus einen *guten* ganzzahligen Startwert (x_0, y_0).

b) Eine Lösung liegt im Bereich $[2,3] \times [0,1]$. Geben Sie hierfür eine geeignete 2D-Fixpunktgleichung an, und weisen Sie die Voraussetzungen des Fixpunksatzes von Banach nach. Begründen Sie Ihre Aussagen.

c) Eine weitere Lösung liegt in $[-1,0] \times [4,5]$. Für diese ist

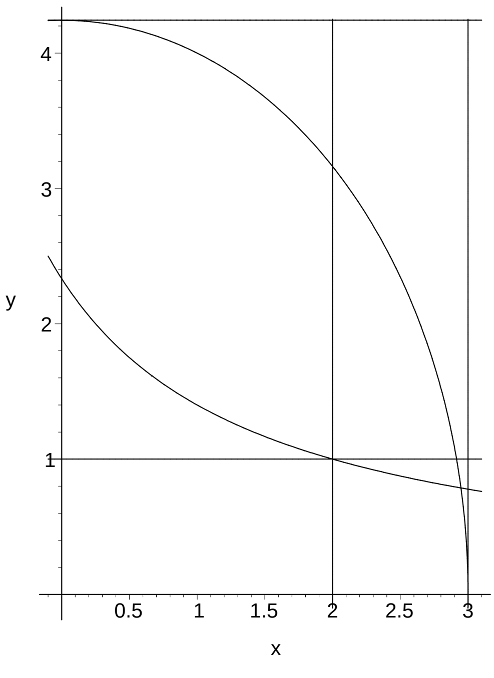
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7-3\,y}{2\,y} \\ \sqrt{18-2\,x^2} \end{pmatrix}$$

eine geeignete Fixpunktiteration mit Kontraktionszahl (bzgl. der 1-Norm) $L = 0.5$. Wieviele Schritte sind ausgehend von dem ganzzahligen Startwert $(x_0, y_0) = (-1, 4)$ höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ zu erzielen?

d) Geben Sie eine a–posteriori–Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an.

zu a)

Skizze (Ellipse in Normallage mit Hauptachsen $a = 3$ und $b = \sqrt{18} \approx 4.34$, $y(x) = \dfrac{7}{2\,x+3}$ mit Polstelle $x = -3/2$, Asymptote $y = 0$) sowie etwa denm Funktionswert an der Stelle $x = 3$ ($y = 7/9$)):



Dert Fixpunkt im 1. Quadranten liegt ungefähr bei $(2.9, 0.8) \to \mathbf{x}_0 = (3,1)$. **(1)**

Hier in b) vorgegeben: Ein geeigneter *ganzzahliger* Bereich ist also $D = [2,3] \times [0,1]$.

zu b)
Wir lösen die erste Gleichung nach x und die zweite Gleichung nach y auf: (Gem. Skizze sind sonst die Steigungen betragsmäßig zu groß :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{9 - \dfrac{y^2}{2}} \\ \dfrac{7}{2\,x+3} \end{pmatrix} =: F(x,y) \to F'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-y}{2\sqrt{9-\frac{y^2}{2}}} \\ \dfrac{-14}{(2\,x+3)^2} & 0 \end{pmatrix}$$

D ist abgeschlossen.
Abb. in sich:
Obige Ableitung zeigt: Die erste Komponente ist (als Funktion nur von y) für $y \in [0, \sqrt{18}]$ und die zweite (als Funktion nur von x) für $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3/2\}$ (streng) monoton fallend. Also:

$$F(D) = [\sqrt{17/2}, 3] \times [7/9, 1] = [2.915475948, 3] \times [0.\overline{7}, 1] \subset D$$

kontraktiv:
Da $(3,1)$ als Startwert gewählt wird und dieser in $F(D)$ liegt, könnten wir für die Kontraktivität bereits eine Einschränkung auf $D' = F(D)$ machen. Dieses Gebiet ist (ebenfalls) **konvex** und F stetig differenzierbar und wir dürfen die Kontaktivität mit F' zeigen. Für die 1- bzw. ∞-Norm von F' auf $D\,(D')$ erhalten wir die maximalen Einträge (jeweils betragsgrößter Zähler dividiert durch betragskleinster Nenner)

$$\frac{1}{2\sqrt{9-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{34}} = 0.1714985852$$

$$\frac{14}{(2\cdot 2+3)^2} = \frac{14}{49} = 0.2857142857 \qquad \left(\frac{14}{\left(2\sqrt{\frac{17}{2}}+3\right)^2} = \frac{14}{(\sqrt{34}+3)^2} = 0.1795200653 \right)$$

Damit ist F auch kontraktiv auf D mit (z.B.) $\alpha = 0.3$. ($\alpha = 0.18$ für D'.)

(5)

zu c)
Jetzt

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7-3\,y}{2\,y} \\ \sqrt{18-2\,x^2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (-1, 4) \to \mathbf{x}_1 = (-0.625, 4) \to \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = (0.375, 0)$$

Die Kontraktionszahl ist für die 1-Norm gegeben. Daher müssen wir auch diese bei den Abschätzungen verwenden.

$$\varepsilon = 2\cdot 10^{-4} \to n \geq \frac{\ln \dfrac{\varepsilon(1-L)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_1}}{\ln L} = 11.8\ldots$$

Also bringen 12 Schritte mit Sicherheit die geforderte Genauigkeit.

(2)

zu d)

$$\mathbf{x}_2 = (-0.625, 4.14955) \;\to\; \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = (0, 0.14955)$$

und somit:

$$\|\overline{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_2\|_1 \leq \frac{0.5}{1-0.5}\,0.14955 = 0.14955 < 0.15$$

(2)

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Für die Funktion (das Integral)

$$F(x) = \int_0^x e^{(1-t^2/2)} dt$$

ist eine Wertetabelle gegeben.

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$F(x)$	0.0000	1.3046	2.3258	2.9517	3.2518	3.3646	3.3977

a) Gesucht ist eine Näherung für $F(1.25)$. Geben Sie die geeigneten Tabellenwerte zur Berechnung mit einem Polynom dritten Grades an und begründen Sie ihre Wahl. (Berechnung nicht erforderlich.)

b) Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(1.9)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung der Stützstellen 1.5, 2, 2.5 und geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung hierzu an.

Hinweis: $F(x)$ ist die Stammfunktion von $e^{1-x^2/2}$. Man berechne $F'(x)$ und $F''(x)$. Es gilt $F^{(3)}(x) = (x^2-1)\,e^{1-x^2/2}$, $\quad F^{(4)}(x) = -x\,(x^2-3)\,e^{1-x^2/2}$, $\quad F^{(5)}(x) = (x^4 - 6\,x^2 + 3)\,e^{1-x^2/2}$

zu a)

Für ein Polynom dritten Grades müssen wir **vier** Stützstellen nehmen. Für die Stelle $\bar{x} = 1.25$ wird der Anteil des Knotenpolynoms durch die Wahl der Stützstellen 0.5, 1.0, 1.5, 2.0 minimiert.

(1)

Achtung: Der tatsächliche Fehler kann für eine andere Stützstellenwahl durchaus kleiner werden.

zu b)

Das dazu gehörige Neville–Aitken Tableau ist: (10-stellige Rechnung, Zwischenergebnisse auf 6 Stellen gerundet)

$$\begin{array}{r|lll}
x_0 = 1.50 & 2.95170 & & \\
& \searrow & & \\
x_1 = 2.00 & 3.25180 \to & 3.19178 & \\
& \searrow & \searrow & \\
x_2 = 2.50 & 3.36460 \to & 3.22924 \to & 3.20676
\end{array}$$

Es ist also $F(1.9) \approx 3.20676$. **(2)**

Verlangt ist eine **möglichst gute** Fehlerabschätzung. Die Formel hierzu lautet:

$$|F(\bar{x}) - p_2(\bar{x})| \leq \frac{1}{3!} \max_{z\in[x_0,x_2]} |F^{(3)}(z)| \cdot |(\bar{x}-x_0)\,(\bar{x}-x_1)\,(\bar{x}-x_2)|.$$

Für die Ableitungen gilt:

$$F'(x) = e^{1-x^2/2}, \qquad F''(x) = -x\,e^{1-x^2/2}$$

Die restlichen Ableitungen sind vorgegeben. Eine Monotonie ist nicht ersichtlich (und auch nicht vorhanden!). Zur Bestimmung der Extrema der 3. Ableitung bestimmen wir die Nullstellen der 4. Ableitung. Dies führt auf die Gleichung und die Nullstellen

$$x\,(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2,3} = 0, \pm\sqrt{3}$$

Man sieht: Nur $x_3 = \sqrt{3} = 1.73205$ liegt in $[1.5, 2.5]$.

$$F^{(3)}(1.5) = 1.1\ldots,\ F^{(3)}(x_3) = 1.21306,\ F^{(3)}(2.5) = 0.6\ldots,\ \to \max_{z\in[1.5,2.5]} |F^{(3)}(z)| = 1.21306 < 1.214$$

$$|F(1.9) - p_2(1.9)| \leq \frac{1}{6} 1.214 \cdot 0.4 \cdot 0.1 \cdot 0.6 = 4.856\ldots \cdot 10^{-3} < 4.86 \cdot 10^{-3}$$

(3)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Für das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} e^{\sin x} dx$$

sollen numerisch Näherungen bestimmt werden.

a) Wieviel Schritte (n) braucht man mit der summierten Trapezregel, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-5}$ zu erreichen? Schätzen Sie dazu die entsprechende Ableitung ab, ohne Extrema zu benutzen.

b) Bestimmen Sie mittels der summierten Simpsonregel eine Näherung für I mit der Schrittweite $h = 1.0$ und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.
Hinweis: Für $f(x) = e^{\sin x}$ gilt $\max_{\xi \in \mathbb{R}} |f^{(4)}(\xi)| = 4 \cdot e$

zu a)

$$f(x) = e^{\sin x} \to f'(x) = \cos x \;\; e^{\sin x} \to f''(x) = (\cos^2 x - \sin x)\; e^{\sin x}$$
$$\to |f''(x)| \leq 2\, e = 5.4366 \qquad \big(\text{besser: } (1 + \sin 1)\, e^{\sin 1} = 4.271802\big)$$

Bem: $\cos^2 x - \sin x$ ist auf $[-1, 1]$ **nicht monoton!**

Für den Fehler der summierten Trapezpunktsregel (auf $[-1, 1]$) gilt damit ($f_m^{(2)} = \max_{x \in [-1,1]} |f''(x)|$):

$$f_T \leq \frac{b-a}{12}\, h_T^2\, f_m^{(2)} \leq \frac{2}{12}\, h_T^2\, 2\, e = \frac{e}{3}\, h_T^2 \overset{!}{\leq} 10^{-5} \to h_T \leq 0.0033221$$

Und somit

$$n_T \geq \frac{1-(-1)}{0.0033221} = 602.02\ldots \to n_T = 603$$

Oder direkt:

$$n_T \geq \sqrt{\frac{b-a}{12}\, \frac{(b-a)^2}{\varepsilon}\, f_m^{(2)}}$$

(3)

zu b)

Mit

$$n_S = 2 \;\; \text{und} \;\; h_S = 1$$

$$I_S = \frac{1}{6}\,(0.431076 + 4 \cdot 0.619139 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1.61515 + 2.31978) = 2.28133$$

Für den Fehler der summierten Simpsonregel (auf $[-1, 1]$) gilt:

$$f_S \leq \frac{1-(-1)}{2880}\, h_S^4 \max_{x \in [-1,1]} |f^{(4)}(x)| \leq \frac{2}{2880}\, 1^4 \;\cdot\; 4\, e \leq \frac{e}{360} = 0.00755078 < 7.6\, 10^{-3}.$$

(3)