

Verständnisfragen-Teil

(24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit “wahr” bzw. “falsch” zu kennzeichnen (hinschreiben). Es müssen mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Sonst wird die Aufgabe als nicht bearbeitet gewertet, also mit 0 Punkten. Das ist auch der Fall, wenn eine Teilaufgabe falsch ist. Ansonsten gibt es für jede richtige Teilaufgabe 0.5 Punkte.

Beantworten Sie mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.		
1.	In $\mathbb{M}(10, 8, -1, 4)$ gilt: $x_{\text{MIN}} = 0.1$.	falsch
2.	In $\mathbb{M}(10, 3, -3, 3)$ gilt: $x_{\text{MAX}} = 999$.	wahr
3.	Es gilt $\left \frac{\text{fl}(x) - x}{x} \right \leq \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	wahr
4.	Die Zahl 128 ist in $\mathbb{M}(2, 8, -8, 8)$ exakt darstellbar.	wahr

VF-2:		
1.	Die Funktion $f(x_1, x_2) := \cos(x_1)e^{x_2}$ ist in der Nähe von $(x_1, x_2) = (\frac{1}{2}\pi, 1)$ schlecht konditioniert.	wahr
2.	Die Konditionszahl einer Funktion gibt an, wie stark sich Rundungsfehler im verwendeten Algorithmus zur Auswertung der Funktion verstärken.	falsch
3.	Die Funktion $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ ist gut konditioniert für alle $x > 0, y < 0$.	falsch
4.	\times und $+$ sind Operationen, die für alle Eingangsdaten ungleich Null gut konditioniert sind.	falsch

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär.		
1.	Sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A . Es gilt $\kappa(A^2) = \kappa(A)^2$.	falsch
2.	Sei A symmetrisch. Dann gilt $\ A\ _\infty = \ A\ _1$.	wahr
3.	Sei D_z die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen definiert durch $d_i = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right)^{-1}$. Für die Skalierung mit D_z gilt: $\kappa_\infty(D_z A) \leq \kappa_\infty(D A)$ für jede reguläre Diagonalmatrix D .	wahr
4.	Zu A existiert eine Zerlegung $A = LR$, mit einer normierten unteren Dreiecksmatrix L und einer oberen Dreiecksmatrix R .	falsch

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A . Bei Störung der Eingabedaten A und b ist der relative Fehler in der Lösung maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler.	falsch
2.	Sei A zusätzlich symmetrisch positiv definit. Für die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ gilt dann: $\det(L) = 1$ und $\det(D) > 0$.	wahr
3.	Der Rechenaufwand der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung zur Bestimmung der Lösung x ist etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.	falsch
4.	Sei \tilde{x} eine Annäherung von x und $\tilde{r} := b - A\tilde{x}$. Dann gilt: $\ \tilde{x} - x\ \leq \ A^{-1}\ \ \tilde{r}\ $.	wahr

VF-5: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.		
1.	Die Summe zweier orthogonaler $m \times m$ - Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.	falsch
2.	Das Householder-Verfahren zur Berechnung einer QR -Zerlegung von A ist ohne Pivotisierung nicht stabil.	falsch
3.	Die einzelnen Schritte des Givens-Algorithmus zur QR -Zerlegung von A lassen sich geometrisch als Drehungen interpretieren.	wahr
4.	Eine Givens-Rotation wird durch eine symmetrische Matrix beschrieben.	falsch

VF-6: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m > n$, $\text{Rang}(A) = n$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems.		
1.	Die Lösung x^* ist eindeutig.	wahr
2.	Die Matrix AA^T ist symmetrisch positiv definit.	falsch
3.	Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems mittels Givens-Rotationen und Householder-Spiegelungen liefert dasselbe Residuum $\ Ax^* - b\ _2$.	wahr
4.	Der Vektor $Ax^* - b$ steht senkrecht auf b .	falsch

VF-7:		
1.	Das Sekanten-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.	falsch
2.	Das Levenberg-Marquardt-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren.	wahr
3.	Fixpunktverfahren konvergieren immer für Startwerte aus einer hinreichend kleinen Umgebung des Fixpunktes.	falsch
4.	Die Konvergenzordnung einer Fixpunktiteration ist immer maximal 1.	falsch

VF-8: Es seien die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ für die Funktion Φ mit Norm $\ \cdot\ $ und Kontraktionskonstante $L < 1$ erfüllt.		
1.	Für alle $x_0 \in D$ konvergiert die Folge $\{x\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ gegen den Fixpunkt x^* .	wahr
2.	Es existiert nur ein Fixpunkt in \mathbb{R}^2 .	falsch
3.	Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\ \Phi'(x)\ \leq 1$.	falsch
4.	Seien $x_0 \in D$ und $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ für $k \geq 0$. Dann gilt: $\ x_3 - x_2\ \leq L^2 \ x_1 - x_0\ $.	wahr

VF-9: Es sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Dazu sei noch $\phi(x) = 1/2 \cdot F(x)^T F(x)$.

1.	Es gilt: $\nabla \phi(x^*) = 0$.	wahr
2.	Die Lösung x^* ist eindeutig.	falsch
3.	Die Gauß-Newton Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Minimums.	falsch
4.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.	wahr

VF-10: Es sei $\Phi(x) = e^{-x^2}$. Wir betrachten das Fixpunktproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}$ so, dass $\Phi(x^*) = x^*$.

1.	Es existiert eine eindeutige Lösung x^* .	wahr
2.	Es sei $x_0 \in [0, 2]$ gegeben. Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k \geq 0$, hat die Konvergenzordnung 1.	wahr
3.	Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k \geq 0$ ist global konvergent.	wahr
4.	Sei $x_0 > 1$ gegeben und $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k \geq 0$. Dann gilt: $x_{k+1} \leq x_k$ für alle $k \geq 0$.	falsch

VF-11: Es sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n] f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f .

1.	Es gilt: $\delta_n = [x_0, \dots, x_n] f$.	wahr
2.	Es gilt: $P(f \mid x_0, \dots, x_n)^{(n)}(x) = n! \delta_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	wahr
3.	$[x_0, x_1] f = f(x_1) - f(x_0)$.	falsch
4.	Mit $f(x) := 2x^4$ gilt $[x_0, \dots, x_n] f = 2$ für alle $n \geq 4$.	falsch

VF-12: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b-a) \sum_{j=0}^m \omega_j f(x_j)$, mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$.

1.	Bei Gauß-Quadraturformeln hängen die Gewichte ω_j von der Funktion f ab.	falsch
2.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms zu f mit äquidistanten Stützstellen.	wahr
3.	Sei $m = 2$. Die Newton-Cotes-Formel hat dann Gewichte $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{3}$.	falsch
4.	Bei der Gauß-Quadratur gilt: $I(p) = Q_m(p)$ für alle Polynome p vom Grade $\leq 2m + 1$.	wahr

Aufgabe 1

(7 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -90 \\ -22 & 0 & 28 \\ 88 & -11 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -10.5 \\ -3.8 \\ 28.7 \end{pmatrix}.$$

- a) Jede Komponente von b sei mit einem relativen Messfehler von $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ behaftet; die Matrix A sei ungestört. Mit welchem relativen Fehler in x (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$) müssen Sie rechnen?

Hinweis: $\|A^{-1}\|_\infty \approx 13.702$.

- b) Lösen Sie $Ax = b$ mittels Gaußelimination **mit** Skalierung (Zeilenäquilibration) und **mit** Spaltenpivotisierung.

Teil a) Da nur die rechte Seite gestört sein soll, gilt für die Fehlerfortpflanzung (in der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm)

$$r_\infty(x) \leq \kappa_\infty(A) \cdot r_\infty(b).$$

Gemäß Aufgabenstellung und Definition gilt

$$r_\infty(b) := \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{\max_i |\Delta b_i|}{\max_j |b_j|} \leq \frac{\max_i (\varepsilon |b_i|)}{\max_j |b_j|} = \frac{\varepsilon \max_i |b_i|}{\max_j |b_j|} = \varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}.$$

Die Norm von A berechnet sich zu

$$\|A\|_\infty = \max\{|1 + 9 + |-90||, |-22| + 0 + 28, 88 + |-11| + 1\} = \max\{100, 50, 100\} = 100.$$

Damit gilt gemäß Hinweis und Definition für die Kondition

$$\kappa_\infty(A) := \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 100 \cdot 13.702 = 1370.2,$$

insgesamt also

$$r_\infty(x) \leq \kappa_\infty(A) \cdot r_\infty(b) \leq 1370.2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 0.274035 \approx 27.5\%.$$

Teil b) Die Skalierungsfaktoren $s_i := \sum_{j=1}^3 |a_{i,j}|$ sind bereits in a) für $\|A\|_\infty$ berechnet worden, und zwar zu

$$s_1 = 100, \quad s_2 = 50, \quad s_3 = 100.$$

Also lautet die skalierte Matrix sowie die skalierte rechte Seite

$$(A_s | b_s) = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.09 & -0.9 & | & -0.105 \\ -0.44 & 0 & 0.56 & | & -0.076 \\ 0.88 & -0.11 & 0.01 & | & 0.287 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_3} \begin{pmatrix} 0.88 & -0.11 & 0.01 & | & 0.287 \\ -0.44 & 0 & 0.56 & | & -0.076 \\ 0.01 & 0.09 & -0.9 & | & -0.105 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{l_{2,1} = -0.5 \\ l_{3,1} = 0.0113636}} \begin{pmatrix} 0.88 & -0.11 & 0.01 & | & 0.287 \\ 0 & -0.055 & 0.565 & | & 0.0675 \\ 0 & 0.09125 & -0.900114 & | & -0.108261 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_3} \begin{pmatrix} 0.88 & -0.11 & 0.01 & | & 0.287 \\ 0 & 0.09125 & -0.900114 & | & -0.108261 \\ 0 & -0.055 & 0.565 & | & 0.0675 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_{3,2} = -0.60274} \begin{pmatrix} 0.88 & -0.11 & 0.01 & | & 0.287 \\ 0 & 0.09125 & -0.900114 & | & -0.108261 \\ 0 & 0 & 0.0224658 & | & 0.00224658 \end{pmatrix}.$$

Rückwärtseinsetzen liefert

$$x = \begin{pmatrix} 0.3 \\ -0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

(9 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) + \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 \right) \\ \frac{1}{8} \left(e^y e^{-x} + \ln(y+1) \right) \end{pmatrix}$$

- a) Zeigen Sie: In $D = [0, 2] \times [0, 1]$ hat F genau einen Fixpunkt.
- b) Wieviele Iterationen sind, ausgehend vom Startwert $(0.2, 0.2)^T$, mit dem Fixpunktverfahren höchstens erforderlich, um bezüglich der 1-Norm eine Genauigkeit von $\varepsilon = 0.01$ zu erreichen?
- c) Geben Sie für die zweite Iterierte der Fixpunktiteration eine a-posteriori Fehlerabschätzung an.

zu a)

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) + \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 \right) \\ \frac{1}{8} \left(e^y e^{-x} + \ln(y+1) \right) \end{pmatrix} \rightarrow F'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \left(x - \frac{3}{5}\right) & \frac{1}{10} \cos\left(\frac{y}{2}\right) \\ -\frac{1}{8} e^y e^{-x} & \frac{1}{8} \left(e^y e^{-x} + \frac{1}{y+1} \right) \end{pmatrix}$$

Selbstabbildung:

Wir schätzen alle Komponenten nach oben und unten ab (quadratische Funktion mit Minimum 0 (bei $3/5$) und Maximum bei 2):

$$0 = \frac{1}{5} \left(\sin\left(\frac{0}{2}\right) + \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\right)^2 \right) \leq F_1(x, y) \leq \frac{1}{5} \left(\sin\left(\frac{1}{2}\right) + \left(2 - \frac{3}{5}\right)^2 \right) = 0.487 \dots \leq 0.49$$

$$0 \leq 0.045 \dots = \frac{1}{8} \left(e^0 e^{-2} + \ln(0+1) \right) \leq F_2(x, y) \leq \frac{1}{8} \left(e^1 e^{-0} + \ln(1+1) \right) = 0.426 \dots \leq 0.43$$

Insgesamt wird also D durch F sicher in $D' := [0, 0.49] \times [0, 0.43] \subset D$ abgebildet.

kontraktiv:

D ist **konvex** und F ist stetig differenzierbar. Wir dürfen die Kontraktivität also durch Abschätzung einer Norm auf D nachweisen

$|\cdot|$ heißt, dass wir von jeder Komponente den Betrag nehmen, $< \cdot$ heißt, dass wir komponentenweise vergleichen; auf D gilt dann (wir benutzen noch $e < 3$):

$$|F'(x, y)| \leq \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \left| 2 - \frac{3}{5} \right| & \frac{1}{10} \cos\left(\frac{0}{2}\right) \\ \frac{1}{8} e^1 e^0 & \frac{1}{8} \left(e^1 e^0 + \frac{1}{0+1} \right) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \frac{14}{25} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.1 \\ 0.375 & 0.5 \end{pmatrix} =: J_{max}$$

und somit $\|J_{max}\|_1 = \frac{187}{200} = 0.935 \leq 1$.

zu b): Wir setzen: $L := 0.935$, haben $\varepsilon = 0.01$ und den Startwert $\mathbf{x}_0 = (0.2, 0.2)^T$ vorgegeben:

$$\mathbf{x}_1 = F(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0.0519667 \\ 0.14779 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -0.148033 \\ -0.0522098 \end{pmatrix} \rightarrow \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_1 = 0.200243$$

Die a-priori Abschätzung ergibt dann

$$\|\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}\|_1 \leq \frac{L^n}{1-L} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_1 \stackrel{!}{\leq} \varepsilon \rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-L)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_1}\right)}{\ln(L)} = \frac{\ln\left(\frac{0.01(1-0.935)}{0.200243}\right)}{\ln(0.935)} = 85.2614$$

und somit reichen 86 Iterationen aus, um die geforderte Genauigkeit zu erzielen.

zu c)

$$\mathbf{x}_2 = F(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 0.0748337 \\ 0.1548 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.022867 \\ 0.00701022 \end{pmatrix} \rightarrow \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|_1 = 0.0298772$$

Damit erhalten wir als a-posteriori Fehlerabschätzung

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = \frac{0.935}{1-0.935} 0.0298772 = 0.429772 < 0.43 \quad .$$

Nachtrag:

Wenn D durch F auf die Teilmenge D' abgebildet wird, so wird auch D' auf D' abgebildet, wir könnten die Kontraktivität also auch durch Abschätzung (einer geeigneten Norm) von F' auf D' (ebenfalls konvex) nachweisen.

$$\text{Für } D' : \quad |F'(x, y)| \leq \begin{pmatrix} \frac{6}{25} & \frac{1}{10} \\ 0.192157 & 0.317157 \end{pmatrix} \rightarrow \|F'(x, y)\| \leq 0.432157 \leq 0.44 := L'$$

Die a-priori Abschätzung ergibt dann

$$n' \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-L')}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|}\right)}{\ln(L')} = \frac{\ln\left(\frac{0.01(1-0.44)}{0.200243}\right)}{\ln(0.44)} = 4.3567$$

und somit reichen 5 Iterationen aus, um die geforderte Genauigkeit zu erzielen.

Als a-posteriori Fehlerabschätzung ergibt sich

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{L'}{1-L'} \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = \frac{0.44}{1-0.44} 0.0298772 = 0.023475 \quad .$$

Aufgabe 3

(8 Punkte)

Gegeben seien folgende Stützstellen t_i und Messwerte y_i

$$\frac{t_i}{y_i} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} .$$

Aus theoretischen Überlegungen geht hervor, dass diese Messdaten einer Funktion

$$y(t) = C e^{-\lambda t}$$

genügen. Bestimmen Sie die Parameter C und λ optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate.

- a) Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \rightarrow \min$. Geben Sie F und x explizit an.
- b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(C_0, \lambda_0) = (5, 0.5)$ einen Gauss-Newton-Schritt aus und berechnen Sie anschließend das zugehörige Residuum.
Hinweis: Lösen Sie das auftretende lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen.

zu a):

$$F(x) = F(C, \lambda) = \begin{pmatrix} C e^{-\lambda} - 4 \\ C e^{-2\lambda} - 2 \\ C e^{-3\lambda} - 1 \end{pmatrix}$$

zu b):

Eine Zeile der Jakobischen für das Gauss-Newtonverfahren (Gradient) plus rechter Seite:

$$z = (e^{-\lambda t} \quad -C t e^{-\lambda t} \mid y_i - C e^{-\lambda t}) .$$

Dies führt mit den Startwerten

$$C_0 = 5 \quad \lambda_0 = 0.5$$

zu folgender Zeile des (lin.) Gleichungssystems mit rechter Seite:

$$J_i = (e^{-0.5 t_i} \quad -5 t_i e^{-0.5 t_i} \mid y_i - 5 e^{-0.5 t_i}) .$$

Einsetzen der Messwerte:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} e^{-0.5} & -5 e^{-0.5} & 4 - 5 e^{-0.5} \\ e^{-1} & -10 e^{-1} & 2 - 5 e^{-1} \\ e^{-1.5} & -15 e^{-1.5} & 1 - 5 e^{-1.5} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.606531 & -3.03265 & 0.967347 \\ 0.367879 & -3.67879 & 0.160603 \\ 0.22313 & -3.34695 & -0.115651 \end{array} \right)$$

führt zu den Normalgleichungen $(A^T A|A^T b)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.553002 & -3.93956 & 0.620003 \\ -3.93956 & 33.9326 & -3.13737 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0.553002 & -3.93956 & 0.620003 \\ 0 & 5.86741 & 1.27949 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \Delta_x = \begin{pmatrix} 2.67466 \\ 0.218068 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.67466 \\ 0.718068 \end{pmatrix}$$

$$y(t) \approx C_1 e^{-\lambda_1 t} = 7.67466 e^{-0.718068 t}$$

Residuum

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y(t_i) - y_i)^2} = 0.329622 \approx 0.33$$

Aufgabe 4

(6 Punkte)

Die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \sin^2(t) dt$$

ist als Tabelle gegeben.

x_i	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x_i)$	0.52112	0.61625	0.71472	0.81459	0.91389	1.0106

Bestimmen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $f(1.55)$ mittels einer Newton-Interpolation vom Grad 3. Werten Sie das Polynom hornerartig aus. Geben Sie für den Näherungswert eine möglichst gute Fehlerabschätzung an.

Hinweis: $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$

a) Für ein kubisches Polynom p_3 müssen wir 4 Tabellenwerte benutzen. Die diesbezügliche Fehlerabschätzung lautet

$$|f(\bar{x}) - p_3(\bar{x})| \leq \frac{1}{4!} \max_{z \in [x_0, x_3]} |f^{(4)}(z)| \cdot |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)(\bar{x} - x_3)|.$$

Da $\bar{x} = 1.55$ gilt, wird der das Knotenpolynom betreffende Anteil durch die Wahl $x_0 = 1.4$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1.6$ und $x_3 = 1.7$ minimiert.

Das Newton-Schema ergibt folgendes Tableau:

$x_0 = 1.40$	0.616253				
$x_1 = 1.50$	0.714720	↘	0.984670		
$x_2 = 1.60$	0.814594	↘	0.998740	↘	0.0703500
$x_3 = 1.70$	0.913885	↘	0.992910	↘	-0.0291500
				↘	-0.3316667

Damit erhalten wir das Polynom

$$p_3(x) = 0.616253 + (x - 1.4)[0.98467 + (x - 1.5)\{0.07035 + (x - 1.6)(-0.331667)\}] \rightarrow p_3(1.55) = 0.764606 \tag{3}$$

Für die Fehlerabschätzung benötigen wir die Ableitungen von f . Für die erste nutzen wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus, und die verbleibenden Ableitungen vereinfachen sich durch ein Additionstheorem.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin^2(x), \\ f''(x) &= 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x), \\ f^{(3)}(x) &= 2 \cos(2x), \\ f^{(4)}(x) &= -4 \sin(2x). \end{aligned}$$

Im Intervall $[(\pi/4 <)1.4, 1.7(< 3\pi/4)]$ ist $-4 \sin(2x)$ monoton steigend. Also untersuchen wir nur die Ränder:

$$\max_{z \in [x_0, x_3]} |f^{(4)}(z)| = 4 \max\{|\sin(2.8)|, |\sin(3.4)|\} = 1.33995.$$

Für das Knotenpolynom ergibt sich

$$|(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)(\bar{x} - x_3)| = 0.15 \cdot 0.05 \cdot 0.05 \cdot 0.15 = 0.15^2 \cdot 0.05^2 = 0.5625 \cdot 10^{-4},$$

und somit

$$|f(\bar{x}) - p_3(\bar{x})| \leq \frac{1.33995}{24} \cdot 0.5625 \cdot 10^{-4} = 0.314051 \cdot 10^{-5} \approx 3.14 \cdot 10^{-6}.$$

(2)

Aufgabe 5

(6 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung des Integrals

$$I = \int_{-3.5}^{-1.5} e^{-\frac{t^2}{3}} dt.$$

Berechnen Sie mit der summierte Trapezregel zum obigen Integral eine Näherung, die vom exakten Integral um höchstens 0.015 abweicht.

Für den Fehler der summierten Trapezregel gilt

$$|I(f) - Q(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{z \in [a,b]} |f''(z)|$$

Für die Ableitungen erhalten wir:

$$f(t) = e^{-\frac{1}{3}t^2} \rightarrow f'(t) = \frac{4t^2 - 6}{9} \cdot e^{-\frac{1}{3}t^2} \rightarrow f^{(3)}(t) = \frac{4t(9 - 2t^2)}{27} \cdot e^{-\frac{1}{3}t^2}.$$

Somit hat f'' auf $[-3.5, -1.5]$ ein lokales Extremum bei $t = -\sqrt{4.5} = -2.12132$. Da weiter:

$$f''(-\sqrt{4.5}) = 0.297507, \quad f''(-3.5) = 0.08\dots \quad \text{und} \quad f''(-1.5) = 0.1\dots$$

ist, gilt also

$$|I(f) - Q(f)| \leq \frac{2}{12} h^2 0.297507 \stackrel{!}{\leq} 1.5 \cdot 10^{-2}.$$

Dies ist für $h \leq \sqrt{9 \cdot 10^{-2} / 0.297507} = 0.3 / \sqrt{0.297507} = 0.55\dots =: \tilde{h}$ erfüllt. Folglich $n > 2/\tilde{h} = 3.6\dots$ und somit $n = 4$ sowie $h = 0.5$.

$$Q(f) = \frac{0.5}{2} (f(-3.5) + 2(f(-3) + f(-2.5) + f(-2)) + f(-1.5)) = 0.3412537776 \approx 0.341$$