Verständnisfragen-Teil (24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit "wahr" bzw. "falsch" zu kennzeichnen (hinschreiben). Es müssen mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Sonst wird die Aufgabe als nicht bearbeitet gewertet, also mit 0 Punkten. Das ist auch der Fall, wenn eine Teilaufgabe falsch ist. Ansonsten gibt es für jede richtige Teilaufgabe 0.5 Punkte.

Beantworten Sie mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.		
1.	In $\mathbb{M}(2,4,-4,3)$ gilt $x_{\text{MAX}} = \frac{15}{2}$.	wahr
2.	Die Zahl 0.375 ist in $\mathbb{M}(2,2,-1,2)$ exakt darstellbar.	wahr
3.	Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt $\lvert\text{fl}(x) - x\rvert \le \text{eps}$.	falsch
4.	In $\mathbb{M}(10,8,-100,100)$ gilt $\text{eps} = 5 \cdot 10^{-8}$.	wahr

VF-2:		
1.	Ist ein Problem gut konditioniert, so sind Algorithmen zu seiner Lösung stets stabil.	falsch
2.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der relative Ausgabefehler von der selben Größenordnung wie der relative Eingabefehler.	falsch
3.	Die relative Kondition der Funktion $f(x,y) = x/y$ ist gut für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$.	wahr
4.	Die relative Konditionszahl der Funktion $f(x) = e^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch $\kappa_{\text{rel}}(x) = x$.	falsch

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig, aber regulär.		
1.	Ohne Pivotisierung ist Gauß-Elimination für A nicht immer durchführbar.	wahr
2.	Die Konditionszahl $\kappa(A)$ von A bezüglich einer Norm $\lVert \cdot \rVert$ ist gegeben durch $\kappa(A) = \lVert A^{-1} \rVert \, \lVert A \rVert^{-1}$.	falsch
3.	Für A existieren eine Permutationsmatrix P, eine untere Dreieckmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R so, dass $P\,A = L\,R$.	wahr
4.	Im Allgemeinen erfordern die Bestimmung einer LR-Zerlegung $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen, Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen.	wahr

VF-4:		
1.	Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist eine orthogonale Matrix.	wahr
2.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$; dann existiert eine Zerlegung $A = Q\,R$ mit $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonal und einer oberen Dreiecksmatrix R.	wahr
3.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit; dann existiert eine eindeutig bestimmte Zerlegung $A = L\,D\,L^T$, wobei L eine normierte untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist.	wahr
4.	Die Matrix einer Householder-Transformation ist stets orthogonal und symmetrisch.	wahr

VF-5: Es seien $m, n \in \mathbb{N}$.		
1.	Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $A = Q\,R$ mit $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal; dann gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$.	wahr
2.	Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und es sei $A = Q\,R$ eine QR-Zerlegung. Dann gilt $Ax = b$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $Rx = Q^T b$.	wahr
3.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, und es seien $A = Q_1\,R_1$ eine mittels Householder-Spiegelungen und $A = Q_2\,R_2$ mittels Givens-Rotationen berechnete QR-Zerlegungen; dann gilt $Q_1 = Q_2$.	falsch
4.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und es sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal; dann gilt $\|A\|_2 = \|AQ^T\|_2$.	wahr

VF-6: Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ betrachten wir das lineare Ausgleichsproblem: bestimme x^* mit minimaler 2-Norm so, dass $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$.		
1.	Es sei $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von A. Für die Pseudoinverse A^+ gilt $A^+ = V\Sigma^{-1}U^T$.	falsch
2.	Ist A regulär, so ist $A^{-1}b$ Lösung der Normalgleichungen des linearen Ausgleichsproblems.	wahr
3.	Es ist x^* Lösung von $A^TAx^* = A^Tb$ genau dann, wenn $Ax^* - b$ orthogonal zu $\{Az\colon z \in \mathbb{R}^n\}$ ist.	wahr
4.	Es ist x^* Lösung des linearen Ausgleichsproblems mit minimaler 2-Norm genau dann, wenn x^* die Normalgleichungen löst und orthogonal zu $\{z \in \mathbb{R}^n\colon Az = 0\}$ ist.	wahr

VF-7: Es seien die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ für die Funktion Φ mit Norm $\|\cdot\|$ und Kontraktionskonstante $L < 1$ erfüllt.		
1.	Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ konvergiert die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ gegen einen Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ.	falsch
2.	Es existiert genau ein $x^* \in D$ mit $x^* = \Phi(x^*)$.	wahr
3.	Für Startwerte $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunktiteration für Φ höchstens mit Konvergenzordnung 1.	falsch
4.	Die Funktion Φ ist auf D stetig differenzierbar.	falsch

VF-8: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 2\cos(\frac{x}{3})$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.		
1.	Es existiert genau ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit $x^* = \Phi(x^*)$.	wahr
2.	Die Fixpunktiteration konvergiert für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$.	wahr
3.	Für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\|x_3 - x^*\| \leq \frac{8}{9}\|x_1 - x_0\|$ für einen Fixpunkt x^* von Φ.	wahr
4.	Es gilt $\|x_3 - x_2\| \leq \frac{4}{9}\|x_1 - x_0\|$ für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$.	wahr

VF-9:		
1.	Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x^* \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung von x^* in der das Newtonverfahren quadratisch gegen x^* konvergiert.	wahr
2.	Für das skalare Problem $f(x) = 0$ mit $f(x) := 6x + 3$ gilt für die erste Iterierte des Newtonverfahrens $x_1 = -\frac{1}{2}$ für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.	wahr
3.	Für das Newtonverfahren zur Lösung des nichtlinearen Systems $f(x) = 0$ mit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist der Aufwand für eine Iteration (unter Vernachlässigung der Auswertung von Funktionen und Ableitungen) im Allgemeinen von der Ordnung $\mathcal{O}(n^3)$.	wahr
4.	Für das skalare Problem $f(x) = 0$ mit $f(x) := x^3 - 5$ lautet die Iterationsvorschrift für das Newtonverfahren: $x_{k+1} = x_k + \frac{5}{3}x_k^{-2}$.	falsch

VF-10: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.		
1.	Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Falls $F'(x)$ Rang n hat, so ist $F'(x)^T F'(x)$ symmetrisch positiv definit.	wahr
2.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, so ist die Konvergenzordnung in der Regel 1.	wahr
3.	Es gilt $F'(x^*)^T F(x^*) = 0$.	wahr
4.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat die Systemmatrix des linearisierten Ausgleichsproblems in jedem Schritt stets vollen Rang.	wahr

VF-11: Es sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es sei $n \geq 4$ und $f(x) = x^4$; dann gilt $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]f = 1$.	wahr
2.	Es gilt $P(f\|x_0, \dots, x_n)(x) = P(f\|x_0, \dots, x_{n-1})(x) + \delta_n \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	wahr
3.	Es gilt $\delta_n = \frac{[x_0,\dots,x_n]f - [x_0,\dots,x_{n-1}]f}{x_{n-1} - x_0}$.	falsch
4.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \|P(f\|x_0, \dots, x_n)(x) - f(x)\|$ ist für äquidistante Stützstellen minimal.	falsch

VF-12: Es sei $f \in C^\infty([a, b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden. Es seien $I_m(f) = (b - a)\sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ die Newton-Cotes-Quadraturformel mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Newton-Cotes-Formel.		
1.	Die Gewichte von Gauß-Quadraturformeln sind stets positiv.	wahr
2.	Es gilt $\|I_0^n(f) - I(f)\| \to 0$ für $n \to \infty$.	wahr
3.	Es gilt $I_m(f) = I(f)$ für alle $f \in \Pi_m$.	wahr
4.	Der Exaktheitsgrad von $I_{m+1}(f)$ ist stets größer als der von $I_m(f)$.	falsch

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 14 & 26 \\ 9 & 26 & 60-\alpha^2 \end{pmatrix}. \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = L\,D\,L^T$. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an. (Berechnung über $L\,R$-Zerlegung gibt 0 Punkte!)

b) Für welche Werte von α ist A symmetrisch positiv definit?

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $L\,D\,L^T x = b$. (Berechnung über $L\,R$-Zerlegung gibt 0 Punkte!)

d) Bestimmen Sie die Determinante von A.

Hinweis: Stellen Sie die Ergebnisse aller Aufgabenteile gegebenenfalls in Abhängigkeit von dem Parameter α dar.

a) Cholesky-Zerlegung:

$$d_{11} = a_{11} = 3, \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = \frac{6}{3} = 2, \qquad l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = \frac{9}{3} = 3,$$

$$d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = 14 - 2^2 \cdot 3 = 2, \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}d_{11}l_{21}}{d_{22}} = \frac{26 - 3\cdot 3\cdot 2}{2} = 4,$$

$$d_{33} = a_{33} - l_{31}^2 d_{11} - l_{32}^2 d_{22} = 60 - \alpha^2 - 3^2\cdot 3 - 4^2 \cdot 2 = 1 - \alpha^2,$$

$$\text{also:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \operatorname{diag}(3,\ 2,\ 1-\alpha^2) \quad = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

(3)

b) A ist positiv definit, wenn alle Diagonalelemente von D positiv sind, d. h. wenn $\alpha^2 < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1$ gilt.

(1)

c) L (Vorwärtseinsetzen):

$$L\,\underbrace{DL^T x}_{y} = b \;\Leftrightarrow\; Ly = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 - 2\cdot 1 = 0 \\ y_3 = 3 - 3\cdot 1 - 4 \cdot 0 = 0 \end{array}$$

L^T (Rückwärtseinsetzen):

$$L^T x = D^{-1} y \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 4 \\ & & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}$$

(1)

(Anm.: Für den Sonderfall $\alpha^2 = 1$ wird hier keine gesonderte Berücksichtigung verlangt – in diesem Fall ist die Lösung nicht mehr eindeutig, aber obiges x weiterhin eine Lösung.)

d) $\det A = \det(LDL^T) = \det(D) = 3 \cdot 2 \cdot (1-\alpha^2) = 6(1-\alpha^2)$. **(1)**

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Gegeben seien Messwerte

t_i	1	2	3
f_i	3	6	9

,

die näherungsweise einem Zusammenhang der Form

$$f(t) = e^{-\alpha t} + \beta\ t$$

genügen sollen.

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(\alpha,\beta)\|_2 \to \min_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$ explizit auf.

b) Für das Gauß–Newton–Verfahren seien die Startwerte $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 2$ gegeben. Wie lautet das linearisierte Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? (Geben Sie die konkreten numerischen Werte für die Einträge von Matrix und Vektor des linearisierten Problems an. Der erste Schritt muss nicht durchgeführt werden.)

c) Nach zwei Iterationen erhält man $\alpha_2 = 3.0460$ und $\beta_2 = 3.0035$. Berechnen Sie zu diesen Parameterwerten das Residuum des nichtlinearen Ausgleichsproblems.

d) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min_{x\in\mathbb{R}^2}$ für

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Transformationen. Geben Sie x und das Residuum explizit an.

Teil a)

Die i-te Zeile der Funktion $F(\alpha,\beta)$ lautet:

$$F_i(\alpha,\ \beta) := f(t_i) - f_i = e^{-\alpha t_i} + \beta\ t_i - f_i\,.$$

Somit haben wir $||F(\alpha,\beta)||_2 \to \min_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$ mit

$$F(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} + \beta - 3 \\ e^{-2\alpha} + 2\,\beta - 6 \\ e^{-3\alpha} + 3\,\beta - 9 \end{pmatrix}\,. \qquad \textbf{(1)}$$

Teil b)

Die i-te Zeile der Jakobimatrix $F'(\alpha,\beta)$ lautet:

$$\begin{pmatrix} -t_i e^{-\alpha t_i} & t_i \end{pmatrix}\,.$$

Nun setzen wir $\alpha_0 = 1$ und $\beta_0 = 2$ ein:

$$F'(\alpha_0,\beta_0) = \begin{pmatrix} -0.367879 & 1 \\ -0.270671 & 2 \\ -0.149361 & 3 \end{pmatrix}, \quad F(\alpha_0,\beta_0) = \begin{pmatrix} -0.632121 \\ -1.86466 \\ -2.95021 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt lautet also:

$$\left\| F'(\alpha_0,\beta_0) \begin{pmatrix} \Delta\alpha_0 \\ \Delta\beta_0 \end{pmatrix} + F(\alpha_0,\beta_0) \right\|_2 \to \min_{\Delta\alpha_0,\Delta\beta_0\in\mathbb{R}} \qquad \textbf{(1)}$$

Teil c) Für das Residuum nach dem zweiten Schritt ergibt sich

$$\|F(3.0460, 3.0035)\|_2 = 5.295523\ldots \cdot 10^{-2} \approx 5.2955 \cdot 10^{-2}\,. \qquad \textbf{(1)}$$

Teil d)
Es ist

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & | & 0 \\ 0 & -3 & | & 1 \\ -3 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Wir nehmen für y die erste Spalte von A:

$$y = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \to \alpha = \operatorname{sign}(y_1)\,\|y\|_2 = 5 \overset{v_1 = y_1 + \alpha}{\longrightarrow} v = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \to \beta = \frac{2}{v^T v} = \frac{1}{45}$$

Mit $h = v^T(A|b) = (45,\ 30,\ 0)$ und

$$\beta\, v = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$$

erhalten wir:

$$(A|b) - (\beta\, v)\, h = \begin{pmatrix} -5 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & | & 1 \\ 0 & 4 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \left(A^{(1)}|b^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} -3 & | & 1 \\ 4 & | & 0 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2)}$$

Im zweiten Schritt

$$y = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \to \alpha = \operatorname{sign}(y_1)\,\|y\|_2 = -5 \overset{v_1 = y_1 + \alpha}{\longrightarrow} v = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} \to \beta = \frac{2}{v^T v} = \frac{1}{40}$$

Mit $h = v^T\left(A^{(1)}|b^{(1)}\right) = (40,\ -8)$ und

$$\beta\, v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

erhalten wir:

$$\left(A^{(1)}|b^{(1)}\right) \to \begin{pmatrix} 5 & | & 1 - \frac{8}{5} \\ 0 & | & +\frac{8}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & | & -0.6 \\ 0 & | & 0.8 \end{pmatrix}$$

Und damit insgesamt

$$(A|b) \longrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -2 & | & 0 \\ 0 & 5 & | & -0.6 \\ 0 & 0 & | & 0.8 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2)}$$

Rückwärtseinsetzen liefert $x = (0.048,\ -0.12)$, das Residuum ist 0.8. **(1)**

Die alternative Schreibweise für Teil d) im Tableau der Form

	$[A\|b]$	$\alpha = \ldots$
v^T	$h = v^T\,(A\|b)$	$\beta = \ldots$
$r = \beta v$	$H = r\,h$	
	$[A\|b] - H$	
	$\ldots$	

lautet wie folgt:

$[A\|b]^{(0)} =$	$\left[\begin{array}{cc\|c} 4 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{array}\right]$	$\alpha_1 = 5$
$\begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\left[\begin{array}{cc\|c} 45 & 30 & 0 \end{array}\right]$	$\beta_1 = \frac{1}{45}$
$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ -\frac{1}{15} \end{pmatrix}$	$\left[\begin{array}{cc\|c} 9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \end{array}\right]$	
$[A\|b]^{(1)} =$	$\left[\begin{array}{cc\|c} -5 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$	$\alpha_2 = -5$
$\begin{pmatrix} & -8 & 4 \end{pmatrix}$	$\left[\begin{array}{cc\|c} & 40 & -8 \end{array}\right]$	$\beta_2 = \frac{1}{40}$
$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$	$\left[\begin{array}{cc\|c} & -8 & \frac{8}{5} \\ & 4 & -\frac{8}{10} \end{array}\right]$	
$[A\|b]^{(2)} =$	$\left[\begin{array}{cc\|c} -5 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{array}\right]$	

Aufgabe 3 (9 Punkte)
Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} (y-1)^2 - 5x + 15 &= 0 \\ \tfrac{1}{2}\ln(x-1) + 2 - y &= 0 \end{aligned}$$

a) Eine Lösung liegt im Bereich $E = [3,4]\times[2,3]$. Geben Sie hierfür eine geeignete 2D-Fixpunktgleichung an, und weisen Sie die Voraussetzungen des Fixpunksatzes von Banach nach. Verwenden Sie hierbei die ∞-Norm. Begründen Sie Ihre Aussagen.

b) Angenommen, die Kontraktionskonstante der Fixpunktabbildung auf E sei $L = \frac{4}{5}$. Wie viele Schritte sind ausgehend von dem Startwert $(x_0, y_0) = (3.5,\ 2.5)$ dann höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-1}$ in der ∞-Norm zu erzielen?

Teil a)
Wir lösen die erste Gleichung nach x und die zweite Gleichung nach y auf:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{1}{5}(y-1)^2 + 3 \\ \frac{1}{2}\ln(x-1) + 2 \end{pmatrix}$$

Prüfung der Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes (mit der Hilfe der Folgerung 5.11).

i) E ist abgeschlossen.

ii) Selbstabbildung:

$\Phi_1(x,y) = \frac{1}{5}(y-1)^2 + 3$ hängt nur von y ab und ist als Funktion von y streng monoton (steigend) für $y \in [2,3]$. Es genügt die Randwerte zu betrachten:

$$\Phi_1(2) = 3.2,\ \Phi_1(3) = 3.8\,.$$

Daraus folgt

$$3.2 \le \Phi_1(x,y) \le 3.8$$

$\Phi_2(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x-1) + 2$ hängt nur von x ab und ist als Funktion von x streng monoton (steigend) im Intervall $[3,4]$. Auch hier genügt es, die Randwerte zu betrachten:

$$\Phi_2(3) = 2.346573\ldots,\ \Phi_2(4) = 2.549306\ldots$$

Daraus folgt (korrekte Rundung beachten: Abrunden für untere, Aufrunden für obere Grenze)

$$2.3465 \le \Phi_2(x,y) \le 2.5494\,.$$

Es folgt $\Phi(E) \subset \tilde{E} := [3.2,\ 3.8] \times [2.3465,\ 2.5494] \subset E$.

iii) Kontraktivität:

Im Folgenden wird $E = [3,4]\times[2,3]$ verwendet. Alternativ wäre auch die Verwendung von $\tilde{E}$ möglich (und in der Praxis auch sinnvoller).

Da Φ in E stetig differenzierbar ist und weiters E abgeschlossen und konvex ist, genügt es (gemäß Folgerung 5.11) zum Nachweis der Kontraktivität zu zeigen dass $\max_{(x,y)\in E} \|\Phi'(x,y)\|_\infty < 1$.

Die Jacobi-Matrix von Φ lautet:

$$\Phi'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5}(y-1) \\ \frac{1}{2(x-1)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die beiden nichtverschwindenden Einträge der Jacobi-Matrix hängen jeweils nur von einer Variablen ab und sind in E streng monoton steigend ($\partial\Phi_1/\partial y$) bzw. fallend ($\partial\Phi_2/\partial x$). Es genügt die Betrachtung der Randwerte:

$$\left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right|_{y=2} = \frac{2}{5},\ \left.\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right|_{y=3} = \frac{4}{5}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right|_{x=3} = \frac{1}{4}, \quad \left.\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right|_{x=4} = \frac{1}{6}$$

$$\max_{(x,y)\in E} \|\Phi'(x,y)\|_\infty \leq \left\| \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{4}{5} =: L < 1$$

Mit i)–iii) sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes nachgewiesen. **(6)**

(Bem.: Somit existiert ein in E eindeutiger Fixpunkt $(x^*, y^*) \in E$, und für jeden Startwert aus E konvergiert die durch Φ definierte Fixpunktiteration gegen (x^*, y^*).)

Teil b)

Mit dem Startwert $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$ erhält man die erste Iterierte $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.45 \\ 2.458145366 \end{pmatrix}$, also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.0418546\ldots \end{pmatrix}, \quad \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0.05\,.$$

Für die Abschätzung in der ∞-Norm kann die Kontraktionskonstante L aus Teil a) verwendet werden. Es gilt die a-priori-Abschätzung

$$\left\| \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \frac{L^n}{1-L} \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_\infty .$$

Für die mindestens erforderliche Anzahl von Schritten n erhalten wir damit

$$\frac{L^n}{1-L} \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \varepsilon = 10^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln \dfrac{\varepsilon(1-L)}{\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_\infty}}{\ln L} = 4.106\ldots$$

Also liefern 5 Schritte mit Sicherheit die geforderte Genauigkeit.

(3)

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	-2	-1	0	2
$f(x_i)$	2	-3	-1	6

a) Berechnen Sie die zwei fehlenden finiten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

$$\begin{array}{r|lllllll}
x_0=-2 & 2 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1=-1 & -3 & \longrightarrow & -5 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2=0 & -1 & \longrightarrow & [x_1,x_2]\,f & \longrightarrow & 3.5 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3=2 & 6 & \longrightarrow & 3.5 & \longrightarrow & 0.5 & \longrightarrow & [x_0,x_1,x_2,x_3]\,f
\end{array}$$

b) Stellen Sie für das Interpolationspolynom $p_3(x)$ vom Grad 3 die **Newton-Darstellung** auf und werten Sie diese mittels des **Horner-artigen Schemas** an der Stelle $\hat{x}=1$ aus.

c) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler $|p_3(\hat{x})-f(\hat{x})|$ an der Stelle $\hat{x}=1$ an.
Hinweis: Für die Ableitungen von $f(x)$ gelte: $\left|f^{(2)}(x)\right|\leq 0.6$, $\left|f^{(3)}(x)\right|\leq 0.75$, $\left|f^{(4)}(x)\right|\leq 0.25$, $\left|f^{(5)}(x)\right|\leq 0.8\;\forall\,x\in[-2,2]$.

d) Die obige Wertetabelle wird um ein weiteres Datenpaar $(x_4,f(x_4))=(1,2)$ ergänzt.
Berechnen Sie mit der hinzugenommenen Stützstelle das Interpolationspolynom $p_4(x)$ vom Grad 4 mit dem Newton-Schema und geben Sie dieses in der **Newton-Darstellung** an.
Hinweis: Bereits vorhandene Zwischenergebnisse können gegebenenfalls weiter verwendet werden.

a) Newton-Schema:

$$\begin{array}{r|lllllll}
x_0=-2 & 2 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1=-1 & -3 & \longrightarrow & -5 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2=0 & -1 & \longrightarrow & \boxed{\mathbf{2}} & \longrightarrow & 3.5 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3=2 & 6 & \longrightarrow & 3.5 & \longrightarrow & 0.5 & \longrightarrow & \boxed{\mathbf{-0.75}}
\end{array}$$

(Anm.: Angabe der beiden fehlenden Werte genügt.) **(1)**

b) Newton-Darstellung:

$$p_3(x)=2-5(x+2)+3.5(x+2)(x+1)-0.75(x+2)(x+1)\,x$$

Interpolationspolynom in Horner-artiger Form:

$$p_3(x)=2+(x+2)\{-5+(x+1)[3.5+x(-0.75)]\}$$

Auswerten an der Stelle $\hat{x}=1$:

$$p_3(1)=3.5$$

(2)

c) Der Fehler $|p_3(\hat{x}) - f(\hat{x})|$ an der Stelle $\hat{x} = 1$ lässt sich mit $n = 3$ und $[a,b] = [-2,2]$ wie folgt abschätzen:

$$|p_3(\hat{x}) - f(\hat{x})| \le \left|\prod_{j=0}^{n} (\hat{x} - x_j)\right| \max_{y\in[a,b]} \frac{\left|f^{(n+1)}(y)\right|}{(n+1)!} \le |(1-(-2))(1-(-1))(1-0)(1-2)| \frac{0.25}{4!} = 0.0625$$

(1)

d) Das Newton-Schema kann um die hinzugenommene Stützstelle erweitert werden. Die Reihenfolge der Stützstellen im Newton-Schema ist beliebig.

$$\begin{array}{r|ccccccccc}
x_0 = -2 & 2 & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & \\
x_1 = -1 & -3 & \longrightarrow & -5 & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_2 = 0 & -1 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 3.5 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_3 = 2 & 6 & \longrightarrow & 3.5 & \longrightarrow & 0.5 & \longrightarrow & -0.75 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
\mathbf{x_4 = 1} & \mathbf{2} & \longrightarrow & \mathbf{4} & \longrightarrow & \mathbf{0.5} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0.25}
\end{array}$$

(Anm.: Hier genügt die Angabe der zusätzlichen Zeile.)

Damit ergibt sich:

$$p_4(x) = 2 - 5(x+2) + 3.5(x+2)(x+1) - 0.75(x+2)(x+1)x + 0.25(x+2)(x+1)x(x-2)$$

(2)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Das Integral

$$I(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \quad \text{mit} \quad f(x) := e^{\frac{1}{2}x^2}\,.$$

soll mittels einer Quadraturformel numerisch ausgewertet werden.

a) Bestimmen Sie für die summierte Mittelpunktsregel und für die summierte Simpsonregel Schrittweiten so, dass der Quadraturfehler in beiden Fällen kleiner als $\varepsilon = 10^{-6}$ ist.

Hinweis: Für die Ableitungen von f gilt $f'(x) = xe^{\frac{1}{2}x^2}$, $f''(x) = (1+x^2)e^{\frac{1}{2}x^2}$, $f^{(3)}(x) = (3+x^2)xe^{\frac{1}{2}x^2}$, $f^{(4)}(x) = (3+6x^2+x^4)e^{\frac{1}{2}x^2}$, $f^{(5)}(x) = (15+10x^2+x^4)xe^{\frac{1}{2}x^2}$.

b) Bestimmen Sie mittels der summierten Simpsonregel mit drei Teilintervallen einen Näherungswert für das Integral.

Lösung: Es bezeichne $I_0^n(f)$ die summierte Mittelpunktsregel und $I_2^n(f)$ die summierte Simpsonregel mit n Teilintervallen.

Teil a) Mit $a := 0$, $b := \frac{1}{2}$ und $h := \frac{b-a}{n}$ gilt für den Fehler der summierten Mittelpunktsregel

$$|I(f) - I_0^n(f)| \le \frac{b-a}{24}h^2 \max_{t\in[a,b]} |f^{(2)}(t)|$$

und für den Fehler der summierten Simpsonregel

$$|I(f) - I_2^n(f)| \le \frac{b-a}{2880}h^4 \max_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)|\,.$$

Auf $[a,b]$ gilt $f^{(3)} \ge 0$ und $f^{(5)} \ge 0$, daher sind sowohl $f^{(2)}$ als auch $f^{(4)}$ auf $[a,b]$ monoton wachsend. Da weiter $f^{(2)} > 0$ und $f^{(4)} > 0$ auf $[a,b]$ erhalten wir

$$\max_{t\in[a,b]} |f^{(2)}(t)| = \max\{|f^{(2)}(a)|, |f^{(2)}(b)|\} = f^{(2)}(b) = 1.41643\ldots < 1.41644$$

sowie

$$\max_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)| = \max\{|f^{(4)}(a)|, |f^{(4)}(b)|\} = f^{(4)}(b) = 5.16998\ldots < 5.16999\,.$$

(2)

Für die summierte Mittelpunktsregel erhalten wir also die Bedingung

$$\frac{b-a}{24}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^2 \cdot 1.41644 < \varepsilon = 10^{-6}$$

und damit

$$n > \Big(\frac{10^6 \cdot 1.41644}{8 \cdot 24}\Big)^{\frac{1}{2}} = 85.8912\,,$$

folglich wird die Fehlerschranke mit $n = 86$ und einer Schrittweite $h = \frac{1}{172}$ unterschritten.

Für die summierte Simpsonregel erhalten wir

$$\frac{b-a}{2880}\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^4 \cdot 5.16999 < \varepsilon = 10^{-6}$$

und damit

$$n > \Big(\frac{10^6 \cdot 5.16999}{32 \cdot 2880}\Big)^{\frac{1}{4}} = 2.73676\,,$$

für die summierte Simpsonregel erhalten wir also $n = 3$ und damit $h = \frac{1}{6}$. **(2)**

Teil b) Es seien $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{6}$, $t_2 = \frac{1}{3}$, $t_3 = \frac{1}{2}$. Für die summierte Simpsonregel mit $h = \frac{1}{6}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} I_2^3(f) &= \frac{h}{6}\Big[f(t_0) + 4f\Big(\frac{t_0+t_1}{2}\Big) + 2f(t_1) + 4f\Big(\frac{t_1+t_2}{2}\Big) + 2f(t_2) + 4f\Big(\frac{t_2+t_3}{2}\Big) + f(t_3)\Big] \\ &= \frac{1}{36}\big[1 + 4\cdot 1.00348 + 2\cdot 1.01399 + 4\cdot 1.03174 + 2\cdot 1.057128 + 4\cdot 1.09068 + 1.13315\big] \\ &= 0.521639\,. \end{aligned}$$

(2)