Verständnisfragen-Teil (24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit "wahr" bzw. "falsch" zu kennzeichnen (hinschreiben). Es müssen mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch gekennzeichnet werden. Sonst wird die Aufgabe als nicht bearbeitet gewertet, also mit 0 Punkten. Das ist auch der Fall, wenn eine Teilaufgabe falsch ist. Ansonsten gibt es für jede richtige Teilaufgabe 0.5 Punkte.

Beantworten Sie mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	In $\mathbb{M}(3, 3, -5, 3)$ gilt $x_{\text{MAX}} = 26$.	wahr
2.	Die Zahl 0.1 ist in $\mathbb{M}(2, 32, -99, 99)$ exakt darstellbar.	falsch
3.	Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt $\lvert \text{fl}(x) - x\rvert \le \text{eps}\,\lvert x\rvert$.	wahr
4.	In $\mathbb{M}(100, 4, -99, 99)$ gilt $\text{eps} = 5 \cdot 10^{-8}$.	falsch

VF-2: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = y\, e^{4\,x^2}$. (Der relative Fehler der Eingabe wird bezüglich der 1-Norm gemessen.)

1.	Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = 1 + 8\,x^2$.	falsch
2.	Die relative Konditionszahl ist $\kappa_{rel} = \max\{1, 8\,x^2\}$.	wahr
3.	Das Problem ist schlecht konditioniert für $\lvert y\rvert \to \infty$.	falsch
4.	Nur für gut konditionierte Probleme gibt es auch stabile Algorithmen.	falsch

VF-3: Mit $A, L, R, P, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ seien R bzw. L eine rechte obere bzw. normierte linke untere Dreiecksmatrix, P eine Permutationsmatrix und D eine reguläre Diagonalmatrix.

1.	Ist A regulär, so existiert stets eine $L\,R$–Zerlegung mit Permutationsmatrix P, so dass $P\,A = L\,R$ gilt.	wahr
2.	Ist A regulär, so existiert stets eine $L\,R$–Zerlegung mit Permutationsmatrix P, so dass $P\,D\,A = L\,R$ gilt.	wahr
3.	Aus $P\,D\,A = L\,R$ folgt, dass A genau dann positiv definit ist, wenn A symmetrisch ist und alle Diagonalelemente von D positiv sind.	falsch
4.	Beschreibt die Diagonalmatrix D eine Zeilenäquilibrierung, so folgt aus $B := D\,A$ die Ungleichung $\kappa_\infty(B) \ge \kappa_\infty(A)$ für die Konditionszahlen von A und B bezüglich der $\lvert\lvert \cdot \rvert\rvert_\infty$-Norm.	falsch

VF-4: Es seien A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definite Matrizen.

1.	$A + B$ ist immer symmetrisch positiv definit.	wahr
2.	$A \cdot B$ ist immer symmetrisch positiv definit.	falsch
3.	Wenn x Eigenvektor von A ist, dann ist x auch Eigenvektor von A^{-1}.	wahr
4.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung von A ist auch ohne Pivotisierung stabil.	wahr

VF-5: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Q\,R = A$ eine $Q\,R$-Zerlegung von A. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$.		
1.	$A\,x = b \Leftrightarrow R\,x = Q^T\,b$	wahr
2.	$\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$	wahr
3.	Zur Lösung von $A\,x = b$ über die $Q\,R$-Zerlegung muss Q explizit bestimmt werden.	falsch
4.	Es sei zusätzlich $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Q_B\,R_B = B$ eine $Q\,R$-Zerlegung von B. Dann ist $(Q\,Q_B)\,(R\,R_B)$ eine $Q\,R$-Zerlegung von $A\,B$.	falsch

VF-6: Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ betrachten wir das lineare Ausgleichsproblem: bestimme x^* mit minimaler 2-Norm so, dass $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$.		
1.	Es sei $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung von A. Für die Pseudoinverse A^+ gilt $A^+ = V\Sigma^+U^T$.	wahr
2.	Es seien σ_1 der größte und σ_r der kleinste (positive) Singulärwert von A. Dann gilt: $\|A\|_2 = \sigma_1/\sigma_r$.	falsch
3.	Die Lösung x^* des linearen Ausgleichsproblems mit minimaler 2-Norm ist immer eindeutig.	wahr
4.	Es seien $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonale Matrizen. Dann haben A und $Q_1\,A\,Q_2$ die selben Singulärwerte.	wahr

VF-7: Es seien $0 < a \in \mathbb{R}$ und $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x) = x/2 + a/(2\,x)$.		
1.	$x^\star = \sqrt{a}$ ist ein Fixpunkt von Φ.	wahr
2.	Das Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert für alle Startwerte $x_0 > 0$ quadratisch gegen $\sqrt{a}$.	wahr
3.	Die Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert nur, falls x_0 hinreichend nahe am Fixpunkt gewählt wird.	falsch
4.	Die Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert für alle $x_0 > \sqrt{a}$ und die Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend.	wahr

VF-8: Es sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und für $x^* \in \mathbb{R}$ gelte $\Phi(x^*) = x^*$ und $\|\Phi'(x^*)\| < 1$. Mit $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.		
1.	Die Fixpunktiteration konvergiert stets, wenn $\|x_0 - x^*\|$ hinreichend klein ist.	wahr
2.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration kann größer als 2 sein.	wahr
3.	Das Fixpunktverfahren lässt sich stets auch als Newton-Verfahren für ein entsprechendes Nullstellenproblem interpretieren.	falsch
4.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration größer als 1.	wahr

VF-9: Nichtlineare Ausgleichsrechnung		
1.	Wenn das Gauß-Newton-Verfahren konvergiert, dann ist es lokal quadratisch konvergent.	falsch
2.	Ein lokales Minimum kann für die Gauß-Newton-Methode abstoßend sein.	wahr
3.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.	wahr
4.	In der Praxis verwendet man das Levenberg-Marquardt-Verfahren, weil es fast immer schneller konvergiert als das Gauß-Newton-Verfahren.	falsch

VF-10: Es sei $\Pi_n = \left\{\sum_{j=0}^n a_j x^j \middle| a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n. Ferner sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.		
1.	Die Lagrange–Fundamentalpolynome $l_{jn}(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$, $0 \le j \le n$ bilden eine Basis von Π_n.	wahr
2.	Die Lagrange–Fundamentalpolynome zur Darstellung von $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ sind gerade so konstruiert, dass gilt: $l_{jn}(x_i) = \delta_{ji}, \quad i, j = 0, \ldots, n$.	wahr
3.	$\{a_0, a_1\, x, a_2\, x^2, \ldots, a_n\, x^n\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in$ $\mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	wahr
4.	Für ein festes $\bar{x}$ ist die Auswertung von $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema, als auch mittels Berechnung einer Newton-Darstellung und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$.	falsch

VF-11: Es sei $P(f\|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$.		
1.	$P(\Psi\|x_0, \ldots, x_n) = \Psi$ für alle Polynome Ψ.	falsch
2.	Für beliebige f ist $P(f\|x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.	wahr
3.	Für genügend oft stetig differenzierbare Funktionen f gilt: $P(f\|x_0, \ldots, x_n)(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$.	falsch
4.	Der Fehler $\max_{x\in[x_0,x_n]} \|P(f\|x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\|$ wird mit wachsendem n immer kleiner.	falsch

VF-12: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ soll numerisch durch geeignete Quadraturformeln approximiert werden.		
1.	Der Fehler der Mittelpunktsregel ist stets genau halb so groß wie der Fehler der Trapezregel.	falsch
2.	Die Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.	falsch
3.	Die summierte Mittelpunktsregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 2 ist.	falsch
4.	Die Simpsonregel ist stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade ≤ 3 ist.	wahr

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Führen Sie eine Zeilenskalierung von A durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix D und die skalierte Matrix $B := D\,A$ explizit an.

b) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von B mit Spaltenpivotisierung, d. h. $PB = LR$. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (1, 3, -0.5)^T$ unter Verwendung der in a) und b) bestimmten Zerlegung von A.
Achtung! Alle anderen Wege geben **0 Punkte**.

d) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A.
Achtung! Der Rechenweg muss ersichtlich sein. Andernfalls wird der Aufgabenteil mit **0 Punkten** bewertet.

a) Zeilenäquilibrierung:

$$D = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}, \qquad B := DA = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0.25 & -0.5 & -0.25 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

b) LR-Zerlegung:

$$B \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{c|cc} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ \hline -0.5 & 0.375 & 0.625 \\ 0.5 & -0.625 & -0.375 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Pivot(1,3,2)}} \left(\begin{array}{c|cc} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ \hline 0.5 & -0.625 & -0.375 \\ -0.5 & 0.375 & 0.625 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ \hline 0.5 & -0.625 & -0.375 \\ \hline -0.5 & -0.6 & 0.4 \end{array}\right)$$

$$\text{also:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & -0.6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & -0.625 & -0.375 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \text{Pivotvektor} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(4)}$$

c) Anwendung von D und dann P auf rechte Seite, d. h. $LRx = PDb$. Lösen durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

$$Db = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.375 \\ -0.125 \end{pmatrix}, \; PDb = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.125 \\ 0.375 \end{pmatrix} = LRx = Ly$$

$$\Rightarrow \; y = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.25 \\ 0.35 \end{pmatrix} = Rx \;\Rightarrow\; x = \begin{pmatrix} 0.125 \\ -0.125 \\ 0.875 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2)}$$

d) Da $PDA = LR \Leftrightarrow A = D^{-1}P^{-1}LR$ ist, gilt für die Determinante von A:

$$det(A) = det(D^{-1})\, det(P^{-1})\, det(L)\, det(R)$$

Hinweis: $det(P^{-1}) = (-1)^{\#Zeilenvertauschungen}$

$$det(A) = \frac{1}{0.25 \cdot 0.125 \cdot 0.25} \cdot (-1)^1 \cdot 1 \cdot (0.5 \cdot (-0.625) \cdot 0.4) = 16 \qquad \textbf{(1)}$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Gegeben seien die Messwerte

$$\begin{array}{c|ccc} t_i & 0.64 & 0.36 & 1 \\ \hline f_i & 0.5 & 1 & 1.4 \end{array},$$

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = x_1\sqrt{t} + x_2\,(t+1)$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem zur Bestimmung der Lösung $x = (x_1, x_2)^T$ auf. Setzen Sie hierbei die Messwerte aus der Tabelle ein. (Hinweis: Achten Sie insbesondere auf eine formal korrekte Schreibweise beim Aufstellen des Ausgleichsproblems.)

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mittels Givens-Rotationen und geben Sie das Residuum in der 2-Norm an. **Achtung!** Andere Lösungswege werden mit **0 Punkten** bewertet.

a) Mit der Matrix A und der rechten Seite b lautet das lineare Ausgleichsproblem:

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{0.64} & 0.64+1 \\ \sqrt{0.36} & 0.36+1 \\ \sqrt{1} & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 1.64 \\ 0.6 & 1.36 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x=(x_1,x_2)^T\in\mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2 \qquad \textbf{(2)}$$

b) Die Givens-Rotationen sind anzuwenden auf

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.8 & 1.64 & 0.5 \\ 0.6 & 1.36 & 1 \\ 1 & 2 & 1.4 \end{array}\right)$$

Eliminiere Element $(2,1)$:
$a := 0.8$, $b := 0.6$, $r := \sqrt{a^2+b^2} = 1$, $c := a/r = 0.8$, $s := b/r = 0.6$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2.128 & 1 \\ 0 & 0.104 & 0.5 \\ 1 & 2 & 1.4 \end{array}$$

Eliminiere Element $(3,1)$:
$a := 1$, $b := 1$, $r := \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$, $c := a/r = 1/\sqrt{2}$, $s := b/r = 1/\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} 1.4142 & 2.9189 & 1.6971 \\ 0 & 0.104 & 0.5 \\ 0 & -0.09051 & 0.28284 \end{array}$$

Eliminiere Element $(3,2)$:
$a := 0.104$, $b := -0.09051$, $r := \sqrt{a^2+b^2} = 0.13787$, $c := a/r = 0.75433$, $s := b/r = -0.65649$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} 1.4142 & 2.9189 & 1.6971 \\ 0 & 0.13787 & 0.19148 \\ 0 & 0 & 0.5416 \end{array}$$

Aus den ersten beiden Zeilen ergibt sich durch Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1^\star \\ x_2^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.6664 \\ 1.3888 \end{pmatrix}.$$

$$f(t) = -1.6667\,\sqrt{t} + 1.3889\,(t+1)$$

Das Residuum ist die $\|\cdot\|_2$-Norm der letzten Zeile der transformierten rechten Seite:

$$\mathrm{r} = 0.5416 \qquad \textbf{(5)}$$

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + 3\,y\,x - 1 \\ y^2 + 1.5\,x^2 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).

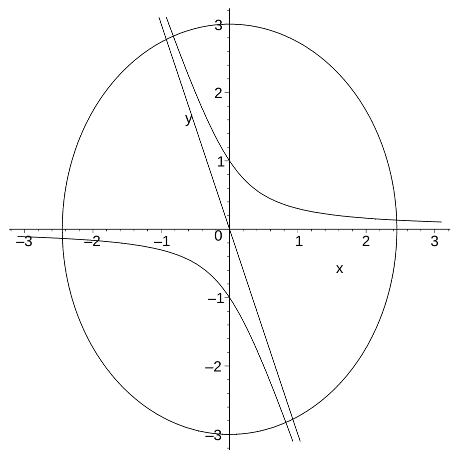
b) Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 3. Quadranten für beide Verfahren

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und führen Sie je zwei Iterationsschritte durch.

Bem.: Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.

Teil a) Skizze (Ellipse: Hauptachsen $a = \sqrt{6} \approx 2.45$ und $b = 3$ sowie Hyperbel: Asymptoten $y = 0$ und $y = -3\,x$ oder Wertetabelle zu $x = (1 - y^2)/(3\,y)$. Zu skizzieren ist der **gesamte** Bereich:



Startwerte: $\begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ **(2)**

Teil b)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + 3\,y\,x - 1 \\ y^2 + 1.5\,x^2 - 9 \end{pmatrix} \to f'(x,y) = \begin{pmatrix} 3\,y & 2\,y + 3\,x \\ 3\,x & 2\,y \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren:

$$x_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -9 & 1 \\ -9 & 0 & -4.5 \end{array}\right) \to \Delta x_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.111111 \end{pmatrix} \to x_1 = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -0.111111 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -0.111111 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} -0.333333 & -7.72222 & 0.154321 \\ -7.5 & -0.222222 & -0.387346 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} -7.5 & -0.222222 & -0.387346 \\ 0 & -7.71235 & 0.171536 \end{array}\right) \to \Delta x_1 = \begin{pmatrix} 0.0523051 \\ -0.0222418 \end{pmatrix} \to x_2 = \begin{pmatrix} -2.44769 \\ -0.133353 \end{pmatrix} \quad \textbf{(5)}$$

Vereinfachtes Newton-Verfahren: x_0 wie beim Newton-Verfahren.

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -0.111111 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -9 & 0.154321 \\ -9 & 0 & -0.387346 \end{array}\right) \to \Delta x_1 = \begin{pmatrix} 0.0430384 \\ -0.0171468 \end{pmatrix} \to x_2 = \begin{pmatrix} -2.45696 \\ -0.128258 \end{pmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Für die Funktion

$$f(x) = 2\exp(1-2x)$$

ist eine Wertetabelle gegeben.

x	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5
$f(x)$	5.4366	3.2974	2.0000	1.2131	0.73576	0.44626	0.27067

a) Berechnen Sie anhand der Wertetabelle einen möglichst guten Näherungswert für $f(0.8)$ mit dem Neville-Aitken-Schema basierend auf einem Polynom vom Grad 3. Geben Sie den berechneten Näherungswert explizit an und begründen Sie die Wahl der Stützstellen detailliert.

Hinweis: Nicht vollständige Begründungen für die Wahl der Stützstellen führen zu Punktabzug. Bei der Wahl der Stützstellen müssen Sie den Verlauf der Funktion $f(x)$ nicht berücksichtigen.

b) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für den in Aufgabenteil a) berechneten Näherungswert an, **ohne** $f(x)$ **auszuwerten**.

a) Für die Stelle $\bar{x} = 0.8$ wird der Anteil des Knotenpolynoms in der Fehlerabschätzung bei Wahl der Stützstellen $x_0 = 0.5$, $x_1 = 0.75$, $x_2 = 1.0$ und $x_3 = 1.25$ minimal. Der Einfluss der Stützstellenwahl auf den Ableitungsterm in der Fehlerformel wird vernachlässigt.

Das Neville-Aitken Tableau lautet:

$$\begin{array}{l|lllllll}
x_0 = 0.50 & 2.00000 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1 = 0.75 & 1.21310 & \rightarrow & 1.05572 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2 = 1.00 & 0.735760 & \rightarrow & 1.11763 & \rightarrow & 1.09287 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3 = 1.25 & 0.446260 & \rightarrow & 0.967360 & \rightarrow & 1.10260 & \rightarrow & 1.09676
\end{array}$$

Der gesuchte Näherungswert ist $f(0.8) \approx p_3(0.8) = 1.09676$. **(3)**

b) Der mittels Neville-Aitken-Schema berechnete Wert basiert auf einem Polynom dritten Grades. Die dazugehörige möglichst gute Fehlerabschätzung lautet

$$|p_3(\bar{x}) - f(\bar{x})| \leq |(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)(\bar{x}-x_2)(\bar{x}-x_3)| \max_{\xi\in[x_0,x_3]} \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\right|$$

Die Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= -4\exp(1-2x) \qquad & f^{(2)}(x) &= 8\exp(1-2x)\\
f^{(3)}(x) &= -16\exp(1-2x) \qquad & f^{(4)}(x) &= 32\exp(1-2x)
\end{aligned}$$

Die Exponentialfunktion ist streng monoton steigend und die Funktion $(1-2x)$ ist steng monoton fallend. Also ist $f^{(4)}(x)$ streng monoton fallend und positiv. Damit liegt das gesuchte Extremum am linken Rand.

$$\max_{\xi\in[0.5,\ 1.25]} |f^{(4)}(\xi)| = f^{(4)}(0.5) = 32$$

Einsetzen aller Werte in die Fehlerabschätzung führt zu:

$$|p_3(0.8) - f(0.8)| \leq |0.3\cdot 0.05\cdot(-0.2)\cdot(-0.45)| \left|\frac{32}{24}\right| = 0.0018 \qquad \textbf{(3)}$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung des Integrals

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\; dx.$$

Berechnen Sie mit der summierten Trapezregel zum obigen Integral eine Näherung, die vom exakten Integral um höchstens 0.05 abweicht.

Für den Fehler der summierten Trapezregel gilt

$$|I(f) - Q(f)| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{\xi \in [a,b]} |f''(\xi)|$$

Für die Ableitungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ f''(x) &= -4\sin(x)\cos(x) \\ f^{(3)}(x) &= -4\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) \end{aligned}$$

$f^{(3)}(x)$ hai in $[0, \pi/2]$ also eine Nullstelle bei $x = \pi/4$. Daher hat f'' auf $[0, \pi/2]$ ein lokales Extremum bei $x = \pi/4$. Da weiter:

$$f''(0) = 0, \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -2 \;\text{ und }\; f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ist, gilt also $\max_{\xi \in [0,\, \pi/2]} |f^{(2)}(\xi)| = 2$.
(Einfacher geht es mit $f(x) = 1/2\,\sin(2\,x)$, woraus $|f^{(2)}(\xi)| = 2\,|\sin(2\,\xi)| \leq 2$ folgt.)

Und somit

$$|I(f) - Q(f)| \leq \frac{\pi}{24} h^2\, 2 \overset{!}{\leq} 0.05.$$

Dies ist für $h \leq \sqrt{\dfrac{0.05 \cdot 12}{\pi}} = 0.437019\ldots \geq 0.43701$ erfüllt. Folglich $n \geq \dfrac{\pi}{2 \cdot 0.43701} = 3.5944\ldots$ und somit $n = 4$ sowie $\tilde{h} = \dfrac{\pi}{2 \cdot 4} = \dfrac{\pi}{8}$. **(4)**

$$\begin{aligned} Q(f) &= \frac{\pi}{8}\left(\tfrac{1}{2}f(0) + f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(2\frac{\pi}{8}\right) + f\left(3\frac{\pi}{8}\right) + \tfrac{1}{2}f\left(4\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{8}\left(2f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.47403 \end{aligned}$$ **(2)**