Verständnisfragen-Teil (24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit “wahr” bzw. “falsch” zu kennzeichnen (hinschreiben). Bewertung: Vier Fragen richtig beantwortet ergibt 2 Punkte. Drei Fragen richtig beantwortet und die 4. nicht beantwortet ergibt 1.5 Punkte. Zwei Fragen richtig beantwortet und zwei nicht beantwortet ergibt einen Punkt. Alle anderen Fälle ergeben 0 Punkte.

Beantworten Sie mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!

VF-1:		
1.	Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems immer instabil.	falsch
2.	Die Multiplikation zweier Zahlen ist stets gut konditioniert.	wahr
3.	Die Funktion $f(x, y) = x + y^2$ ist gut konditioniert für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$.	wahr
4.	Die Funktion $f(x, y) = y\, e^{x^2}$ ist für $(x, 0)$ mit $x \to \infty$ gut konditioniert.	falsch

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\kappa_2(B) \leq \kappa_2(A)$.	falsch
2.	Es seien $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $A\,\tilde{x} = \tilde{b}$ und $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A bezüglich $\\|\cdot\\|$. Es gilt $\\|\tilde{x} - x\\| \leq \kappa(A)\\|\tilde{b} - b\\|$.	falsch
3.	Es existiert immer eine $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A.	falsch
4.	Es existiert immer eine $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ von A.	wahr

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.		
1.	Die Gauß-Elimination mit Pivotisierung führt auf eine Zerlegung $P\,A = L\,R$.	wahr
2.	Eine $L\,R$-Zerlegung $P\,A = L\,R$ kann man verwenden um A^{-1} zu bestimmen.	wahr
3.	Falls A symmetrisch ist, existiert immer eine Cholesky-Zerlegung $A = L\,D\,L^T$ von A.	falsch
4.	Pivotisierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination.	wahr

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = Q\,R$ eine QR-Zerlegung von A.		
1.	Es seien $m = n$, $\det(A) \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $A\,x = b \Leftrightarrow x = R^{-1}Qb$.	falsch
2.	Die Householder-Methode zur Bestimmung der $Q\,R$-Zerlegung ist immer stabil.	wahr
3.	Es gilt: $\\|A\\|_2 = \\|R\\|_2$, wobei $\\|\cdot\\|_2$ die euklidische Norm ist.	wahr
4.	Das Produkt zweier orthogonaler $m \times m$- Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.	wahr

VF-5: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $H_1, \ldots, H_k$ Householder-Transformationen, sodass $H_k \ldots H_2 H_1 A = R$ ist, mit einer oberen Dreiecksmatrix R. Weiter sei $Q = H_k \ldots H_2 H_1$.

1.	Für jede der Householder-Transformationen H_j, $1 \le j \le k$, gilt $H_j^{-1} = H_j$.	wahr
2.	Die Produktmatrix Q ist orthogonal.	wahr
3.	Die Produktmatrix Q ist immer eine Spiegelung.	falsch
4.	Es seien $m = n$ und A regulär. Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(Q)$, wobei $\kappa_2(.)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.	falsch

VF-6: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n \le m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$ gilt. Weiter sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$.

1.	Es gilt $\|Ax - b\|_2 = \min \Leftrightarrow A^T(Ax - b) = 0$.	wahr
2.	Es gilt $\|Ax - b\|_2 = \|Rx - Q^T b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	falsch
3.	Es sei $Qb =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n,\ b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $x^* = R^{-1}b_1$.	wahr
4.	Die Matrix R kann man über Givens-Rotationen bestimmen.	wahr

VF-7: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x^\star$ so, dass $\Phi(x^\star) = x^\star$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung (Jacobi-Matrix) von Φ an der Stelle x.

1.	Falls die Fixpunktiteration konvergiert, so gilt $\|\Phi'(x^\star)\| < 1$.	falsch
2.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist immer 1.	falsch
3.	Das Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.	wahr
4.	Falls $\Phi'(x^\star) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\|x_0 - x^\star\|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.	wahr

VF-8: Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^\star) = 0,\ f'(x^\star) \neq 0$. Weiter sei $[a, b]$ ein Intervall, sodass $a < x^\star < b$ und $x^\star$ die einzige Nullstelle von f in $[a, b]$ ist.

1.	Das Bisektionsverfahren konvergiert, wenn man die Startwerte $x_0 = a$, $x_1 = b$ wählt.	wahr
2.	Das Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$.	falsch
3.	Es sei f konvex auf $[a, b]$, d.h. $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt: Das Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$.	falsch
4.	Es sei $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Dann gilt: $\Phi'(x^\star) = 0$.	wahr

VF-9: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^\star)\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.

1.	Die Gauß-Newton Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung von $x^\star$.	falsch
2.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.	wahr
3.	Die Konvergenzordnung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens ist in der Regel größer als die der Gauß-Newton-Methode.	falsch
4.	Um Konvergenz des Levenberg-Marquardt-Verfahrens zu gewährleisten, muss der in diesem Verfahren verwendete Parameter hinreichend groß gewählt werden.	wahr

VF-10: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$ interpoliert.
Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Es gilt: $P(f \,|\, x_0, \dots, x_n)(x) = P(f \,|\, x_0, \dots, x_{n-1})(x) + \delta_n \Pi_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	wahr
2.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \|P(f \,\|\, x_0, \dots, x_n)(x) - f(x)\|$ ist minimal wenn man die Stützstellen x_i äquidistant wählt.	falsch
3.	Es sei f ein Polynom vom Grad maximal n. Dann gilt: $f(x) = P(f \,\|\, x_0, \dots, x_n)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	wahr
4.	Es gilt: $\delta_n = [x_n, \dots, x_0]f$.	wahr

VF-11: Es sei $f \in C^\infty([a, b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden. Es sei $I_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ eine Quadraturformel mit $a \le x_0 < \dots < x_m \le b$.

1.	Bei den Newton-Cotes Formeln gilt: $I_m(f) = \int_a^b P(f \,\|\, x_0, \dots, x_m)(x)\,dx$, wobei $P(f \,\|\, x_0, \dots, x_m)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad m ist.	wahr
2.	Bei den Newton-Cotes Formeln gilt: $I_m(f) = I(f)$ falls f ein Polynom vom Grad maximal m ist.	wahr
3.	Es sei m fest gewählt. Der Fehler $\|I_m(f) - I(f)\|$ ist bei einer Gauß-Quadraturformel immer kleiner als bei einer Newton-Cotes Formel.	falsch
4.	Für die Newton-Cotes Formeln gilt $\|I_m(f) - I(f)\| \to 0$ für $m \to \infty$.	falsch

VF-12: Wir betrachten Einschrittverfahren zur Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y)$, $t \in [t_0, T]$, mit Anfangswert $y(t_0) = y^0$.

1.	Der lokale Abbruchfehler misst, wie sehr der durch das numerische Verfahren gelieferte Wert nach einem Schritt von der exakten Lösung abweicht.	wahr
2.	Eine sehr hohe Konsistenzordnung kann man nur mit impliziten Verfahren realisieren.	falsch
3.	Die Größe des lokalen Abbruchfehlers bestimmt die Konsistenzordnung.	wahr
4.	Das verbesserte Eulerverfahren hat die Konvergenzordnung 2.	wahr

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie eine Zeilenskalierung von A durch. Geben Sie die entsprechende Diagonalmatrix D (mit skalierter Matrix $B := D\,A$) explizit an.

b) Bestimmen Sie die $L\,R$-Zerlegung von der skalierten Matrix $B = D\,A$ mit Spaltenpivotisierung, d. h. $P\,B = L\,R$. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

c) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A. Verwenden Sie hierzu die $L\,R$-Zerlegung aus den vorherigen Aufgabenteilen. (Achtung: Andere Lösungswege werden mit 0 Punkten bewertet.)

a) Zeilenäquilibrierung:

$$D = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 \end{pmatrix}, \qquad B := D\,A = \begin{pmatrix} -0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0.375 & 0.375 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

(1)

Bem.: Die Einträge von D werden in der Praxis als Vektor gespeichert.

b) $L\,R$-Zerlegung:

$$B \overset{\text{kein Pivot(1,2,3)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \\ 0.375 & 0.375 & 0.25 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|cc} -0.75 & 0.25 & 0 \\ \hline -0.33333 & 0.33333 & 0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.25 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{Pivot(1,3,2)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|cc} -0.75 & 0.25 & 0 \\ \hline -0.5 & 0.5 & 0.25 \\ -0.33333 & 0.33333 & 0.5 \end{array}\right) \overset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -0.75 & 0.25 & 0 \\ \hline -0.5 & 0.5 & 0.25 \\ \hline -0.33333 & 0.66667 & 0.33333 \end{array}\right)$$

$$\text{also:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -0.33333 & 0.66667 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} -0.75 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.33333 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \,\widehat{=}\, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Matrix P wird in der Praxis nie aufgestellt.

(4)

c) Determinante von A:

Da $P\,D\,A = L\,R \Leftrightarrow A = D^{-1}P^{-1}L\,R$ ist, gilt für die Determinante von A:

$$det(A) = det(D^{-1})\,det(P^{-1})\,det(L)\,det(R)$$

Hinweis: $det(P^{-1}) = (-1)^{\#Zeilenvertauschungen}$

$$\det(A) = \frac{1}{0.25 \cdot 0.5 \cdot 0.125} \cdot (-1)^1 \cdot 1 \cdot (-0.75 \cdot 0.5 \cdot 0.33333) = 8$$

(1)

Nur der Wert der Determinante (das kann der Taschenrechner) gibt hier 0 Punkte.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben sind die vier Meßwerte

t_i	0	1/2	1	3/2
y_i	2.1	-1.1	-1.8	0.9

,

die der Theorie nach zu einer Funktion der Form

$$y(t) = \alpha\,\cos(\pi\,t) + \beta\,\sin(\pi\,t)$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $\|A\,x - b\|_2 \to \min$ auf. Geben Sie A, b und x explizit an.

b) Bestimmen Sie die zugehörigen Normalgleichungen (**Gleichungssystem nicht lösen**).

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem aus a) mittels Givensrotationen. Geben Sie die Lösung $y(t)$ sowie das Residuum explizit an.

Zu a) Gesucht ist $x^\star$ mit $\|A\,x^\star - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ (hier $n = 2$) mit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2.1 \\ -1.1 \\ -1.8 \\ 0.9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

(1)

Zu b)

Normalgleichungen

$$A^T\,A\,x = A^T\,b \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3.9 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(1)

Zu c)

Eliminiere a_{31} : $r = \sqrt{2} \to c = 1/\sqrt{2}$, $s = -1/\sqrt{2}$

$$\to \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & | & 1.95\sqrt{2} = 2.757716446 \\ 0 & 1 & | & -1.1 \\ 0 & 0 & | & 0.15\sqrt{2} = 0.2121320343 \\ 0 & -1 & | & 0.9 \end{pmatrix}$$

(2)

Eliminiere a_{42} : $r = \sqrt{2} \to c = 1/\sqrt{2}$, $s = -1/\sqrt{2}$

$$\to \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & | & 1.95\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & | & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & | & 0.15\sqrt{2} \\ 0 & 0 & | & -0.1\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(2)

Rückwärtseinsetzen liefert

$$x = \begin{pmatrix} 1.95 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also: $y(t) = 1.95\,\cos(\pi\,t) - \sin(\pi\,t)$.

Das Residuum ist $\sqrt{(0.15^2 + 0.1^2)\,2} \approx 0.255$. **(2)**

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + y^2 - 4\,x^2 \\ x + 2 - (y - 0.5)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sollen iterativ mit Fixpunktiterationen bestimmt werden.

a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).

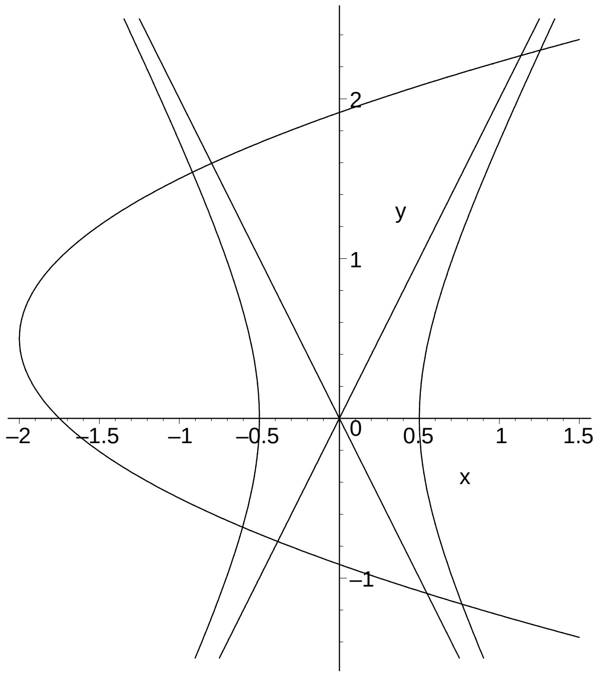
b) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0,2] \times [1, 2.5]$ und die Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5\,\sqrt{1+y^2} \\ 0.5 + \sqrt{2+x} \end{pmatrix} =: F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

erfüllt sind. Verwenden Sie die ∞-Norm.

c) Wie viele Iterationsschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0,\ y_0) = (2,\ \sqrt{3})$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der ∞-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 10^{-3}$ anzunähern? Verwenden Sie als Kontraktionszahl $L = 3/4$.

Teil a) Skizze: nach rechts geöffnete Parabel mit Scheitel bei $(-2,\ 1/2)$ sowie Hyperbel mit Asymptoten $y = \pm 2\,x$ und Scheitel $(\pm 0.5,\ 0)$ oder Wertetabelle.



Startwerte:

$$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2)

Teil b)

i) E ist abgeschlossen.

ii) Selbstabbildung: F_1 hängt nur von y ab, d. h. $F_1 = F_1(y)$ und ist als Funktion von y monoton steigend in $[1,\ 2.5]$. Extrema können also nur an den Rändern angenommen werden: $F_1(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707\ldots \in [0,\ 2]$, $\quad F_1(2.5) = \frac{\sqrt{7.25}}{2} = 1.34\ldots \in [0,\ 2]$.
F_2 hängt nur von x ab, d. h. $F_2 = F_2(x)$ und ist als Funktion von x monoton steigend in $[0, 2]$. Extrema können also auch hier nur an den Rändern angenommen werden: $F_2(0) = \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1.91\ldots \in [1, 2.5]$, $\quad F_2(2) = \frac{1}{2} + \sqrt{4} = 2.5 \in [1,\ 2.5]$.
Insgesamt gilt also $\widetilde{E} := F(E) = [0.707,\ 1.35] \times [1.91,\ 2.5] \subset E \Rightarrow F$ ist selbstabbildend auf E. **(2)**

iii) Kontraktivität: Da E konvex ist und F stetig Differenzierbar ist, reicht es, die Ableitung abzuschätzen (**nur dafür brauchen wir die Konvexität!**). Als Jacobi-Matrix ergibt sich

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{y}{2\sqrt{1+y^2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2+x}} & 0 \end{pmatrix}$$

F'_{12} hängt nur von y ab, aber Monotonie ist nicht direkt ersichtlich. Da $y \in [1,\, 2.5]$ folgt aber $|F'_{12}| \leq \frac{2.5}{2\sqrt{1+1^2}} = 0.88\ldots < 0.9$.
F'_{21} hängt nur von x ab und ist monoton fallend **und positiv**$(x > -2)$. Daher gilt für $x \in [0,\, 2]$ $|F'_{21}| \leq \frac{1}{2\sqrt{2+0}} = 0.353\ldots < 0.4 < 0.9$.
Insgesamt folgt (sowohl für die $1-$ als auch für die ∞-Norm): F is in E kontraktiv mit $L = 0.9$

(3)

Teil c)

$$\text{Startwert:} \qquad x^0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{1. Schritt:} \qquad x^1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \qquad x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.767949 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\|x^1 - x^0\|_\infty = 1$ und somit (wegen des Hinweises $L = 0.75$) gemäß a-priori-Abschätzung

$$n \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^1-x^0\|}}{\ln L} = \frac{\ln \frac{10^{-3}(1-0.75)}{1}}{\ln 0.75} = 28.8\ldots$$

Es sind also höchstens $n = 29$ Schritte erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon := 10^{-3}$ zu erreichen. **(2)**

Bemerkung 1: Eigentlich:

$$n \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^1-x^0\|}}{\ln L} = \frac{\ln \frac{10^{-3}(1-0.9)}{1}}{\ln 0.9} = 87.4\ldots$$

Und damit: Es sind also höchstens $n = 88$ Schritte erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon := 10^{-3}$ zu erreichen.

Bemerkung 2: L kann man besser bestimmen. Bereits wegen der Einschränkung auf $\tilde{E}$ (Selbstabbildung) können wir (Startwert!) $y \in [\sqrt{3},\, 2.5]$ annehmen, was $L = 2.5/4 = 0.625$ ergibt $\rightarrow n = 17$ Schritte reichen.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Für das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2 - e^{-x^2}}\, dx$$

sollen numerisch Näherungen bestimmt werden.

a) Wieviel Schritte (n) braucht man mit der summierten Trapezregel, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$ zu erreichen?

b) Bestimmen Sie mittels der summierten Simpsonregel eine Näherung für I mit der Schrittweite $h = 1.0$ und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

c) Bestimmen Sie mittels der summierten Trapezregel eine Näherung für I mit der Schrittweite $h = 0.5$ und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

Hinweis: Für $f(x) = \dfrac{1}{2 - e^{-x^2}}$ und $x \in [-1, 1]$ gilt $|f'(x)| \leq 0.55$, $|f^{(2)}(x)| \leq 2$, $|f^{(3)}(x)| \leq 6$ und $|f^{(4)}(x)| \leq 36$.

zu a)

Für den Fehler der summierten Trapezregel (auf $[-1, 1]$) gilt gem. Hinweis ($f_m^{(2)} := 2 \geq \max_{x\in[-1,1]} |f^{(2)}(x)|$):

$$f_T \leq \frac{b-a}{12}\, h_T^2\, f_m^{(2)} \leq \frac{2}{12}\, h_T^2\, 2 = \frac{1}{3}\, h_T^2 \overset{!}{\leq} \frac{1}{3}\, 10^{-4} \to h_T \leq 0.01$$

Und somit

$$n_T \geq \frac{1-(-1)}{0.01} = 200 \to n_T = 200$$

Oder direkt:

$$n_T \geq \sqrt{\frac{b-a}{12}\, \frac{(b-a)^2}{\varepsilon}\, f_m^{(2)}}$$

(2)

zu b)

Mit

$$n_S = 2 \;\text{ und }\; h_S = 1$$

$$I_S = \frac{1}{6}\left(f(-1) + 4\, f(-0.5) + 2\, f(0) + 4\, f(0.5) + f(1)\right) = \frac{1}{6}\left(2 + 8\, f(0.5) + 2\, f(1)\right) = 1.62939$$

Für den Fehler der summierten Simpsonregel (auf $[-1, 1]$) gilt:

$$f_S \leq \frac{1-(-1)}{2880}\, h_S^4 \max_{x\in[-1,1]} |f^{(4)}(x)| \leq \frac{2}{2880}\, 1^4 \cdot 36 = \frac{1}{40} = 0.025.$$

(2)

zu c)

Mit

$$n_T = 4 \;\text{ und }\; h_T = \frac{1}{2}$$

$$I_T = \frac{1}{4}\left(f(-1) + 2\, f(-0.5) + 2\, f(0) + 2\, f(0.5) + f(1)\right) = \frac{1}{4}\left(2 + 4\, f(0.5) + 2\, f(1)\right) = 1.62522$$

Für den Fehler der summierten Trapezregel (auf $[-1, 1]$) gilt:

$$f_T \leq \frac{1-(-1)}{12}\, h_T^2 \max_{x\in[-1,1]} |f^{(2)}(x)| \leq \frac{2}{12} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{12} = 0.08\overline{3}.$$

(2)

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y''(t) - (4t-1)y'(t) = 0, \qquad y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1.$$

Berechnen Sie mit dem impliziten Euler–Verfahren ($y_{i+1} = y_i + h\, f(t_{i+1},\, y_{i+1})$) und der Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ jeweils eine Approximation von $y(1)$ und $y'(1)$. Bestimmen Sie außerdem $y''(1)$.

Zunächst wird die lineare DGL 2. Ordnung in ein System 1. Ordnung überführt. Setze

$$\mathbf{z}(t) := \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix},$$

dann erhält man

$$\mathbf{z}'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ (4t-1)\, y'(t) \end{pmatrix}.$$

Die äquivalente Anfangswertaufgabe lautet also

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}(t,\, \mathbf{z}(t)) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ (4t-1)\, z_2(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{z}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

Impliziter Euler:

$$\mathbf{z}^{j+1} = \mathbf{z}^j + h\, \mathbf{f}\left(t_j + h\,,\, \mathbf{z}^{j+1}\right)$$

Hier also:

$$\mathbf{z}^{j+1} = \mathbf{z}^j + h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & (4t_{j+1} - 1) \end{pmatrix} \mathbf{z}^{j+1} \to \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 - h(4t_{j+1} - 1) \end{pmatrix} \mathbf{z}^{j+1} = \mathbf{z}^j$$

Startwerte: $t_0 = 0$, $\mathbf{z}^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mit $t_n = 1$ und $h = 0.5$ ergibt das 2 Schritte.

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{z}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix} \mathbf{z}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \to \mathbf{z}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(2)

Also folgt

$$y(1) \approx z_1^2 = 1, \quad y'(1) \approx z_2^2 = -4.$$

Für $y''(1)$ folgt $y''(1) \approx (4t_2 - 1)z_2^2 = -12.$ **(1)**