Verständnisfragen-Teil (24 Punkte)

Es gibt zu jeder der 12 Aufgaben vier Teilaufgaben. Diese sind mit "wahr" bzw. "falsch" zu kennzeichnen (hinschreiben). Bewertung: Vier Fragen richtig beantwortet ergibt 2 Punkte. Drei Fragen richtig beantwortet und die 4. nicht beantwortet ergibt 1.5 Punkte. Zwei Fragen richtig beantwortet und zwei nicht beantwortet ergibt einen Punkt. Alle anderen Fälle ergeben 0 Punkte.

Beantworten Sie in jeder der 12 Aufgaben mindestens zwei Fragen mit wahr oder falsch!

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt $\lvert\text{fl}(x)\rvert \leq \lvert x\rvert$.	falsch
2.	In $\mathbb{M}(2, 4, -4, 4)$ gilt $x_{\text{MIN}} = \frac{1}{16}$.	falsch
3.	Die Zahl 0.25 ist in $\mathbb{M}(2, 12, -99, 99)$ exakt darstellbar.	wahr
4.	Für alle $x \in \mathbb{D}$ gilt $\text{fl}(x) = x(1 + \varepsilon)$ für ein ε mit $\lvert\varepsilon\rvert \leq \text{eps}$.	wahr

VF-2: Aufgaben zur relativen Kondition.

1.	Die Funktion $f(x_1, x_2) := x_2 e^{x_1}$ ist für alle (x_1, x_2) mit $\lvert x_1\rvert \leq 1$ gut konditioniert.	wahr
2.	Eine gute Kondition eines Problems impliziert eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Verfahren zur Lösung des Problems.	falsch
3.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der durch Rundungseffekte verursachte Fehler im Ergebnis von derselben Größenordnung wie der durch die Kondition des Problems bedingte unvermeidbare Fehler.	wahr
4.	Die Addition zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist gut konditioniert.	wahr

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

1.	Für die Konditionszahl $\kappa(A)$ der Matrix A gilt $\kappa(A) \geq 1$.	wahr
2.	Zeilenäquilibrierung ($B = D\,A$) führt auf eine Matrix B mit $\kappa_\infty(B) \leq \kappa_\infty(A)$.	wahr
3.	Es existiert immer eine $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A.	falsch
4.	Es sei $A = Q\,R$ eine $Q\,R$-Zerlegung von A. Es gilt $x = Q^T b$.	falsch

VF-4: Es seien A, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definite Matrizen. Sei $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung von A.

1.	$A\,B$ ist immer symmetrisch positiv definit.	falsch
2.	Es gilt $\det(A) = \det(D)$.	wahr
3.	Sei $\kappa(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der Euklidischen Norm. Es gilt $\kappa(A) = \kappa(D)$.	falsch
4.	Es existiert immer eine $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A.	wahr

VF-5: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $G_1, \dots, G_k$ Givens-Rotationen, so dass $G_k \dots G_2 G_1 A = R$, mit einer oberen Dreiecksmatrix R.		
1.	Es sei $\kappa(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der Euklidischen Norm. Es gilt $\kappa(G_j) = 1$ für alle $j = 1, \dots, k$.	wahr
2.	Die Produktmatrix $G_k \dots G_1$ kann man geometrisch als eine Rotation interpretieren.	wahr
3.	Es gilt: $A = Q\,R$, mit $Q = G_1 ... G_k$.	falsch
4.	Das Givens-Verfahren zur Berechnung einer $Q\,R$-Zerlegung von A ist ohne Pivotisierung ein stabiles Verfahren .	wahr

VF-6: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter sei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R$ gilt. Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$. Weiter sei $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b.		
1.	Je größer der Winkel Θ, desto schlechter ist das Problem konditioniert.	wahr
2.	Es gilt $R\,x^* = Q\,b$.	falsch
3.	Es gilt $A^T A\,x^* = A^T b$.	wahr
4.	Sei $Q\,b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Es gilt $\|A\,x^*\|_2 = \|b_2\|_2$.	falsch

VF-7: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = \dfrac{1}{1+x}$, mit $x \neq -1$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq -1$, wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.		
1.	Die Aufgabe $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung in $[0, \infty)$.	wahr
2.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ erfüllt.	wahr
3.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in diesem Fall 2.	falsch
4.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige Startwerte $x_0 > -1$.	wahr

VF-8: Sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{x^2} - 4$.		
1.	f hat eine eindeutige Nullstelle x^*.	falsch
2.	Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = -1$, $b_0 = 1$, konvergiert gegen eine Nullstelle x^*.	falsch
3.	Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = 0$, $b_0 = 2$, konvergiert gegen eine Nullstelle x^*.	wahr
4.	Das Newton-Verfahren, angewandt auf f, konvergiert für jeden Startwert $x_0 \neq 0$ gegen eine Nullstelle x^*.	wahr

VF-9: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* eine Lösung des Nullstellenproblems $f(x) = 0$.		
1.	Das vereinfachte Newton-Verfahren benötigt die Ableitung f' (Jacobi-Matrix) nicht.	falsch
2.	Wenn $f'(x^*)$ regulär ist, so konvergiert das Newton-Verfahren für alle Startwerte die hinreichend nahe bei x^* liegen, und die Konvergenzordnung ist 2.	wahr
3.	Das Sekantenverfahren erlaubt nur die Dimension $n = 1$.	wahr
4.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren gewährleistet für jeden Startwert die Konvergenz des Verfahrens.	falsch

VF-10: Es sei $P(f\,\|\,x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Es sei δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]\,f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Sei $f(x) = x^3 + 2x$. Es gilt $[x_0, x_1, x_2, x_3]f = 1$.	wahr
2.	Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal wenn man bei der Polynominterpolation den Interpolationsfehler minimieren will.	falsch
3.	Es gilt $P(f\,\|\,x_0, \ldots, x_n)(x) = \delta_n x^n + P(f\,\|\,x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ für alle x.	falsch
4.	Es gilt $P(f\,\|\,x_0, x_1, \ldots, x_n)(x) = P(f\,\|\,x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0)(x)$ für alle x.	wahr

VF-11: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$, mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$.		
1.	Die absolute Kondition, bezüglich der Maximumnorm, der Bestimmung von $I(f)$ ist gut.	wahr
2.	Sei $Q_2(f)$ die Simpsonregel. Es gilt $Q_2(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grade 4.	falsch
3.	Bei der Gauß-Quadratur hängen die Gewichte w_j von der Funktion f ab.	falsch
4.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an f, wobei die Stützstellen so gewählt werden, dass der Fehler minimal wird.	falsch

VF-12: Wir betrachten Einschrittverfahren zur Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung $y'(t) = f(t, y)$, $t \in [t_0, T]$, mit Anfangswert $y(t_0) = y^0$.		
1.	Bei impliziten Einschrittverfahren ist die Konvergenzordnung immer höher als bei expliziten Einschrittverfahren.	falsch
2.	Der lokale Abbruchfehler misst den maximalen Fehler zwischen numerischer Annäherung und exakter Lösung.	falsch
3.	Bei Einschrittverfahren ist die Konsistenzordnung der Regel höher als die Konvergenzordnung.	falsch
4.	Der lokale Abbruchfehler wird verwendet, um die Konsistenzordnung des zugehörigen Verfahrens zu bestimmen.	wahr

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2.56 & -2.24 & -3.2 \\ 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Führen Sie eine Zeilenäquilibrierung von A durch. Geben Sie die zur Skalierung benutzte Diagonalmatrix D und die resultierende Matrix $B := D\,A$ jeweils explizit an.

b) Bestimmen Sie die $L\,R$-Zerlegung der skalierten Matrix $B = D\,A$ mit Spaltenpivotisierung, d.h. $P\,B = L\,R$. Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\,x = b$ mit Hilfe der in Teil b) bestimmten $L\,R$-Zerlegung für eine gegebene rechte Seite $b = (-2, -3.2, 33)^T$. (Achtung: Andere Lösungswege werden mit 0 Punkten bewertet.)

a) Zeilenäquilibrierung:

$$D = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad B := DA = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ -0.32 & -0.28 & -0.4 \\ 0.2 & -0.7 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

(1)

Bem.: Die Einträge von D werden in der Praxis als Vektor gespeichert.

b) LR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ -0.32 & -0.28 & -0.4 \\ 0.2 & -0.7 & 0.1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Tausche}(1,2)} \begin{pmatrix} -0.32 & -0.28 & -0.4 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & -0.7 & 0.1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} -0.32 & -0.28 & -0.4 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ -0.625 & -0.875 & -0.15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Tausche}(2,3)} \begin{pmatrix} -0.32 & -0.28 & -0.4 \\ -0.625 & -0.875 & -0.15 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} -0.32 & -0.28 & -0.4 \\ -0.625 & -0.875 & -0.15 \\ 0 & -\frac{4}{7} & \frac{29}{70} \end{pmatrix}$$

$$\text{also:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.625 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{7} & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} -0.32 & -0.28 & -0.4 \\ 0 & -0.875 & -0.15 \\ 0 & 0 & \frac{29}{70} \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Matrix P wird in der Praxis nie aufgestellt.

Hinweis: Bei nur 5 angegebenen Stellen werden die $-\frac{4}{7}$ zu -0.57143 und damit ergibt sich anstelle der $\frac{29}{70}$ ein Wert von 0.41429.

(4)

c) Es gilt:

$$A\,x = b \Leftrightarrow P\,D\,A\,x = P\,D\,b \Leftrightarrow L\,R\,x = P\,D\,b$$

Substituiere $Rx = y$ und löse

$$L\,y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.625 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{7} & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 3.3 \\ -0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 3.3 - 0.4 \cdot 0.625 \\ -0.5 + \frac{4}{7} \cdot 3.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 3.05 \\ \frac{87}{70} \end{pmatrix}$$

Mache im Anschluss die Substitution rückgängig:

$$R\,x = \begin{pmatrix} -0.32 & -0.28 & -0.4 \\ 0 & -0.875 & -0.15 \\ 0 & 0 & \frac{29}{70} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 3.05 \\ \frac{87}{70} \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{-0.4+0.4\cdot 3+0.28\cdot(-4)}{-0.32} \\ \frac{3.05+0.15\cdot 3}{-0.875} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2)

Hinweis: Verwendet man nur 5 gültige Stellen, so ergibt sich folgende Lösung:

$$L\,y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.625 & 1 & 0 \\ 0 & -0.57143 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 3.3 \\ -0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 3.3 - 0.4 \cdot 0.625 \\ -0.5 + 0.57143 \cdot 3.05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 3.05 \\ 1.2429 \end{pmatrix}$$

$$R\,x = \begin{pmatrix} -0.32 & -0.28 & -0.4 \\ 0 & -0.875 & -0.15 \\ 0 & 0 & 0.41429 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 3.05 \\ 1.2429 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{-0.4+0.4\cdot 3.0001+0.28\cdot(-4)}{-0.32} \\ \frac{3.05+0.15\cdot 3.0001}{-0.875} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99988 \\ -4 \\ 3.0001 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (9 Punkte)

In festen Abständen von 0.1 Sekunden wurde ein Signal abgetastet, hinter dem man eine Schwingung der Form $f(t) = \sin(\omega\, t) + c$ vermutet. Es ergab sich folgende Messwerttabelle:

t_i	0.1	0.2	0.3
f_i	-0.5	1	1.3

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$ explizit auf (Messwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß-Newton-Verfahren ist der Startwert $x^0 = (\omega^0, c^0) = (0.9, 0.4)$ gegeben. Stellen Sie das zugehörige linearisierte Ausgleichsproblem für den ersten Schritt auf.

c) Bestimmen Sie die Lösung Δx^0 des so entstandenen linearen Ausgleichsproblems mit Hilfe einer $Q\,R$-Zerlegung über Householder-Transformationen. Geben Sie x^1 explizit an.

d) Bestimmen Sie nach diesem Schritt das Residuum (in der euklidischen Norm) sowohl des linearisierten Problems als auch des nichtlinearen Ausgleichsproblems.

Teil a)

Die i-te Zeile der zu minimierenden Funktion $F(x) = F(\omega, c)$ lautet:

$$F_i(x) := f(t_i) - f_i = \sin(\omega t_i) + c - f_i\ .$$

Gesucht ist somit x^* mit $||F(x^*)||_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^2} ||F(x)||_2$ mit $x = (\omega, c)$ und

$$F(x) = F(\omega, c) = \begin{pmatrix} \sin(\omega\cdot 0.1) + c - (-0.5) \\ \sin(\omega\cdot 0.2) + c - 1 \\ \sin(\omega\cdot 0.3) + c - 1.3 \end{pmatrix}$$

(1)

Teil b)

Aufgestellt werden soll

$$\left\| F(x^0) + F'(x^0)\Delta x^0 \right\|_2 \to \min_{\Delta x^0 = (\Delta\omega^0, \Delta c^0)^T \in\mathbb{R}^2}$$

Hier ist

$$F_i'(x) = (t_i \cos(\omega t_i) \qquad 1).$$

Damit ergibt sich:

$$\left\| \begin{pmatrix} 0.98988 \\ -0.42097 \\ -0.63327 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.099595 & 1 \\ 0.19677 & 1 \\ 0.28913 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\omega^0 \\ \Delta c^0 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{(\Delta\omega^0, \Delta c^0)\in\mathbb{R}^2}$$

(2)

Teil c)

Zur Lösung des Systems aus b) verwenden wir ein Tableau.
(s.a. http://www.igpm.rwth-aachen.de/Numa/NumaMB/Loes/qr_bsp.pdf)

			0.099595	1	-0.98988	
			0.19677	1	0.42097	
			0.28913	1	0.63327	$\alpha_1 = 0.36364$
0.46324	0.19677	0.28913	(0.16845)	0.94914	-0.19262	$\beta_1 = 5.9364$
		2.75	-0.36364	-1.6101	-0.46019	
		1.1681	0	-0.10869	0.64597	
		1.7164	0	-0.62911	0.96388	$\alpha_2 = -0.63843$
	-0.74712	-0.62911		(0.47698)	-1.089	$\beta_2 = 2.0965$
			-0.36364	-1.6101	-0.46019	8.6154
		-1.5663	0	0.63843	-1.0598	-1.66
		-1.3189	0	0	-0.47244	$res = 0.47244$

Die nächste Iterierte lautet somit:

$$x^1 = x^0 + \Delta x^0 = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8.6154 \\ -1.66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.5154 \\ -1.26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ c^1 \end{pmatrix}$$

(4)

Teil d)

Das Residuum des linearisierten Problems können wir aus dem transformierten System *explizit* angeben:

$$\|r_0\|_2 = \left\|F(x^0) + F'(x^0)\Delta x^0\right\|_2 = \|(-0.47244)\|_2 = 0.47242\ .$$

Der Residualvektor des nicht linearen Systems ergibt sich zu ($f(t) = \sin(9.5154\,t) - 1.26$):

$$F(x^1) = F(9.5154, -1.26) = \begin{pmatrix} \sin(9.5154 \cdot 0.1) - 1.26 - (-0.5) \\ \sin(9.5154 \cdot 0.2) - 1.26 - 1 \\ \sin(9.5154 \cdot 0.3) - 1.26 - 1.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.054321 \\ -1.3147 \\ -2.2769 \end{pmatrix} \Rightarrow \|F(x^1)\|_2 = 2.6298$$

(2)

Aufgabe 3 Ist eine Vereinfachung der Aufgabe 3 aus der Klausur F07 (9 Punkte)
Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

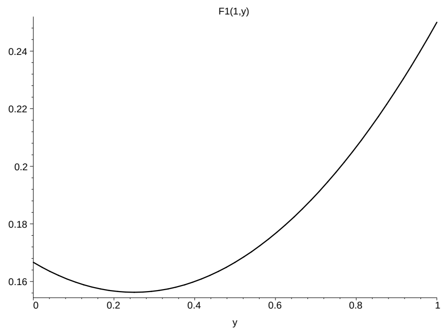
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{4} + \dfrac{(x-y)^2}{6} \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y).$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0,1] \times [0,1]$ erfüllt sind. Verwenden Sie die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

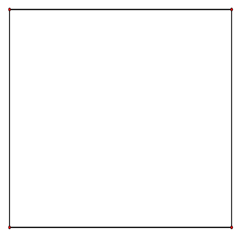
b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0,\ 0)$ zwei Iterationsschritte durch, d. h. berechnen Sie (x_2, y_2).

c) Geben Sie eine a-priori- und eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an unter Verwendung der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

d) Wie viele Iterationsschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0,\ 0)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon := 6 \cdot 10^{-5}$ anzunähern?



Im $\mathbb{R}^2$ gibt es Monotonie nur entlang von Linien bzw. Kurven Daraus lässt sich i.a. nicht auf auschließliche Randextrema schließen. Zudem gibt es lokale Randextrema: Siehe $F_1(1, y)$ links.
Zum Rand gehören im $\mathbb{R}^2$ nämlich neben den Eckpunkten auch die *Verbindungskanten* (siehe rechts).



zu a)
i) E ist abgeschlossen.
ii) **Selbstabbildung:** Wegen $(x,y) \in [0,1]^2$ gilt $x - y \in [-1,1]$ und folglich $\cos((x-y)/2) \in [\cos(1/2), 1] = [0.8775826,\ 1]$. Daraus folgt

$$0 \le F_1(x,y) = \frac{y}{4} + \frac{(x-y)^2}{6} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} = 0.416667$$
$$0 < 0.438791 = 0 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\right) \le F_2(x,y) = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \le \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cos(0) = \frac{5}{6} = 0.833333 < 1.$$

Insgesamt gilt also $F(E) \subset \widetilde{E} := [0, 0.416667] \times [0.438791, 0.833334] \subset E \Rightarrow F$ ist selbstabbildend auf $\widetilde{E} \subset E$.
iii) **Kontraktivität:** Da E konvex ist und F stetig differenzierbar ist, dürfen wir zum Nachweis die Ableitung benutzen. Als Jacobi-Matrix ergibt sich

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x-y}{3} & \dfrac{1}{4} - \dfrac{x-y}{3} \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right) & \dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Wegen $(x,y) \in E = [0,1]^2$ gilt (s.o.) $|(x-y)/2| \le 1/2$ sowie $\sin((x-y)/2) \in [-\sin(1/2),\ \sin(1/2)]$, so dass wir durch elementweise Betragsabschätzung (zulässig in der $\|\cdot\|_1$- und $\|\cdot\|_\infty$-Norm, nicht jedoch in der $\|\cdot\|_2$-Norm) erhalten:

$$\|F'(x,y)\|_\infty \le \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\left\{ \frac{1}{3} + \frac{7}{12}, \frac{7}{12} + \frac{1}{4} \right\} = \frac{11}{12} =: L < 1,$$

d. h. F ist kontraktiv auf E. Somit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

(5)

Bemerkung: In $\widetilde{E} = [0, 0.416667] \times [0.438791, 0.833334]$ gilt

$$\|F'(x,y)\|_\infty \leq \left\| \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{19}{36} \\ 0.434512 & 0.101179 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{29}{36} = 0.712290.$$

Hier bringt die Einschränkung auf $\widetilde{E}$ also nicht sehr viel.

zu b)

Startwert: $\quad x^0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Schritt: $\quad x^1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad$ und für c) $\quad x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. Schritt: $\quad x^2 := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} + \frac{1}{24} \\ \frac{1}{2}\cos\left(\frac{-1}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0.484456 \end{pmatrix}, \qquad x^2 - x^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -0.0155438 \end{pmatrix}$

(1)

zu c) Es gilt $\|x^1 - x^0\|_\infty = 1/2$ und somit gemäß a-priori-Abschätzung

$$\|x^2 - x^*\|_\infty \leq \frac{L^2}{1-L}\|x^1 - x^0\|_\infty = \frac{\left(\frac{11}{12}\right)^2}{1 - \frac{11}{12}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{121}{24} = 5.04167 \qquad (< 5.1).$$

Es gilt $\|x^2 - x^1\|_\infty = 1/6$ und somit gemäß a-posteriori-Abschätzung

$$\|x^2 - x^*\|_\infty \leq \frac{L}{1-L}\|x^2 - x^1\|_\infty = \frac{\frac{11}{12}}{1 - \frac{11}{12}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{6} = 1.83333 \qquad (< 1.9).$$

(2)

zu d) Es gilt gemäß a-priori-Abschätzung

$$\|x^n - x^*\|_\infty \leq \frac{L^n}{1-L}\|x^1 - x^0\|_\infty \overset{!}{\leq} \varepsilon \Longleftrightarrow$$

$$n \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^1 - x^0\|}}{\ln L} = \frac{\ln\left(\frac{6 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}\right)}{\ln \frac{11}{12}} = \frac{\ln 10^{-5}}{\ln \frac{11}{12}} = \frac{-5 \cdot \ln 10}{\ln 11 - \ln 12} = 132.3\ldots \quad .$$

Es sind also höchstens $n = 133$ Schritte erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon := 6 \cdot 10^{-5}$ zu erreichen.

(1)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	-1	1	2	3
$f(x_i)$	2	4	2	6

a) Berechnen Sie die fünf fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

$$\begin{array}{r|ccccccc}
x_0=-1 & 2 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1=1 & [x_1]f & \longrightarrow & 1 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2=2 & 2 & \longrightarrow & [x_1,x_2]f & \longrightarrow & -1 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3=3 & [x_3]f & \longrightarrow & [x_2,x_3]f & \longrightarrow & [x_1,x_2,x_3]f & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

(Geben Sie die zu ergänzenden Werte dabei separat und mit nachvollziehbarem Rechenweg unterhalb der Aufgabenstellung an.)

b) Stellen Sie für das Interpolationspolynom $p_3(x)$ vom Grad 3 zur gegebenen Wertetabelle eine Newton-Darstellung auf. Berechnen Sie anschließend $p_3(0)$ durch Horner-artige Auswertung dieser Newton-Darstellung.

c) Für die n-ten Ableitungen von f gelte $\max_{x\in[-1,3]} |f^{(n)}(x)| \le 3\cdot 2^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie unter dieser Annahme eine möglichst scharfe Abschätzung für $|f(0)-p_3(0)|$.

Zu a): Wir erhalten

$$\begin{aligned}
[x_1]f &= f(x_1) = 4,\\
[x_3]f &= f(x_3) = 6,\\
[x_1,x_2]f &= \frac{[x_2]f-[x_1]f}{x_2-x_1} = \frac{2-4}{2-1} = -2,\\
[x_2,x_3]f &= \frac{[x_3]f-[x_2]f}{x_3-x_2} = \frac{6-2}{3-2} = 4,\\
[x_1,x_2,x_3]f &= \frac{[x_3,x_2]f-[x_2,x_1]f}{x_3-x_1} = \frac{4-(-2)}{3-1} = 3.
\end{aligned}$$

(2)

Das vollständige Newton-Schema lautet damit

$$\begin{array}{r|ccccccc}
x_0=-1 & 2 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1=1 & 4 & \longrightarrow & 1 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2=2 & 2 & \longrightarrow & -2 & \longrightarrow & -1 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3=3 & 6 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Zu (b): Die Newton-Darstellung von p_3 lautet

$$p_3(x) = 2 + (x+1) - (x+1)(x-1) + (x+1)(x-1)(x-2)\,.$$

Auswertung in Horner-artiger Form ergibt

$$p_3(0) = 2 + (0+1)(1+(0-1)(-1+(0-2))) = 6\,.$$

Zu (c): Aus der Darstellung des Interpolationsfehlers (siehe Formelsammlung) und der Abschätzung für die Ableitungen folgt

$$\begin{aligned}
|f(0)-p_3(0)| &\le \left|\prod_{i=0}^{3}(0-x_i)\right| \max_{y\in[1,3]} \frac{|f^{(4)}(y)|}{4!}\\
&= (2\cdot 3)\frac{3\cdot 2^5}{2\cdot 3\cdot 4} = 24\,.
\end{aligned}$$

(3)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$-\frac{1}{2}y''(t) + \frac{4}{t^2}y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = 2t \text{ für } t \in [1,2], \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1\,.$$

Wenden Sie die implizite Trapezregel mit Schrittweite $h = 1$ an, um Näherungen für $y(2)$ und $y'(2)$ zu berechnen.

Lösung:

Zunächst schreiben wir das Problem als System von Differentialgleichungen erster Ordnung in den Unbekannten $y_1 := y$, $y_2 := y'$. Wir erhalten das System

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t)\,, \\ y_2'(t) &= \frac{8}{t^2}y_2(t) + \frac{2}{t}y_1(t) - 4t\,, \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $y_1(1) = 0$, $y_2(1) = 1$. **(2)**

In Matrixschreibweise (***Anm.:*** muss nicht verwendet werden) haben wir

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2}{t} & \dfrac{8}{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen mit $y_1^0 := y_1(1)$, $y_2^0 := y_2(1)$ die Anfangswerte für die implizite Trapezregel, und mit y_1^1, y_2^1 die Werte nach einem Zeitschritt. Einsetzen in die Verfahrensvorschrift (siehe Formelsammlung) mit Schrittweite $h = 1$ liefert

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}\right].$$

Wir setzen nun die Anfangswerte ein und bringen die Terme mit y_1^1, y_2^1 auf die linke Seite. Damit ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right] - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Auflösen unter Ausnutzung der Dreiecksstruktur ergibt

$$y_1^1 = 2, \quad y_2^1 = (-2)(\tfrac{1}{2} - 2) = 3.$$

Damit erhalten wir die Näherungen $y(2) \approx 2$, $y'(2) \approx 3$.

(4)