Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Dezimalzahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an.

Original - d.h. unvertauschte Reihenfolge

VF-1: In der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit. Weiter seien $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$ und $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ beschreibe die Reduktionsabbildung (Standardrundung).		
1.	Es gilt $\text{fl}(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{M}(b,m,r,R)$.	wahr
2.	Es gilt $\lvert\text{fl}(x) - x\rvert \le \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	falsch
3.	Die Anzahl der Elemente in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ hängt von m ab.	wahr
4.	Die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 13 in $\mathbb{M}(3,8,-8,8)$ ist 111.	wahr
5.	Geben Sie x_{MAX} für $\mathbb{M}(3,3,-2,4)$ an.	**78**
6.	Die Funktion $f(x) = x^2 \ln(x)$ is gut konditioniert für $x \to \infty$.	wahr
7.	Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.	falsch
8.	Ein Algorithmus zur numerischen Lösung eines Problems kann nur stabil sein, wenn das vorliegende Problem gut konditioniert ist.	falsch
9.	Eine gute Kondition eines Problems induziert eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Verfahren zur numerischen Lösung des Problems.	falsch
10.	Berechnen Sie die relative Konditionszahl der Funktion $f(x_1,x_2) = x_1^4\, x_2^2$ für $(x_1,x_2) = (e,\pi)$.	**4**

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.		
1.	Es sei $B := DA$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\kappa_\infty(B) \le \kappa_\infty(A)$.	wahr
2.	Es sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl bzgl. $\lVert\cdot\rVert$. Bei Störung der Eingabedaten b ist der relative Fehler in der Lösung $\frac{\lVert\tilde{x}-x\rVert}{\lVert x\rVert}$ maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler $\frac{\lVert\tilde{b}-b\rVert}{\lVert b\rVert}$.	wahr
3.	Es existieren stets eine Permutationsmatrix P, eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $PA = LR$ gilt.	wahr
4.	Es sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung y von $Ry = b$ über Rückwärtseinsetzen beträgt etwa $\frac{1}{2}n$ Operationen.	falsch
5.	Es sei $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\kappa_2(A)$.	**2**
6.	Es sei $P\,A = L\,R$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt: $\lvert\det(A)\rvert = \lvert\det(R)\rvert$.	wahr
7.	Pivotisierung verbessert die Kondition des Gleichungssystems $A\,x = b$.	falsch
8.	Für die Konditionszahl der Matrix A gilt $\kappa(A) = \kappa(A^{-1})$.	wahr
9.	Es seien $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung x und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Die Norm des Residuums $\lVert r\rVert$ ist stets von derselben Größenordnung wie die Norm des Fehlers $\lVert x - \tilde{x}\rVert$.	falsch
10.	Berechnen Sie $\lVert A\rVert_\infty$ für $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.	**8**

VF-3:		
1.	Es sei A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$-Matrix. Es existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$ gilt.	wahr
2.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten $n \times n$-Matrix über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{6}\,n^2$ Operationen.	falsch
3.	Es sei A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$-Matrix. Für die stabile Berechnung der Cholesky-Zerlegung $A = L\,D\,L^T$ ist Pivotisierung notwendig.	falsch
4.	Für jede orthogonale Matrix Q gilt $Q^TQ = QQ^T$.	wahr
5.	Es sei $A = LDL^T$ mit $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$. Geben Sie $\det(A)$ an.	**4.5**
6.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Dann ist $\kappa_2(Q_v) = 1$.	wahr
7.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Für die Lösung des Gleichungssystems $Q_vx = b$ gilt $x = Q_vb$.	wahr
8.	Die Berechnung einer $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ über Householder-Transformationen ist nur dann durchführbar, wenn die Matrix A den vollen Spaltenrang n hat.	falsch
9.	Das Produkt zweier Givens-Rotationen ist eine orthogonale Matrix.	wahr
10.	Es seien Q eine orthogonale Matrix und $Q\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$. Geben Sie $\lvert b\rvert$ an.	**5**

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R$ gilt. Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle mit $\|A\,x^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$. Weiter sei $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b.

1.	Es gilt $Rx^* = Qb$.	falsch
2.	Es gilt $A^TAx^* = b$.	falsch
3.	Je kleiner der Winkel Θ, desto besser ist das Problem konditioniert.	wahr
4.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$.	wahr
5.	Bestimmen Sie $(Ax^* - b)^TAx^*$.	**0**
6.	Die Matrix R kann man über das Cholesky Verfahren angewandt auf A^TA bestimmen.	falsch
7.	Die Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung der Lösung.	falsch
8.	Bei der Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems hat die Systemmatrix des linearisierten Ausgleichsproblems in jedem Schritt stets vollen Rang.	falsch
9.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems hat die Systemmatrix des linearisierten Ausgleichsproblems in jedem Schritt stets vollen Rang.	wahr
10.	Es seien $m = 3$, $n = 2$ und $Qb = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|Ax^* - b\|_2$.	**1**

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.

1.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist immer 1.	falsch
2.	Falls $\|\Phi'(x^*)\| < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte x_0 mit $\|x_0 - x^*\|$ hinreichend klein.	wahr
3.	Es seien $n = 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Es sei $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Dann gilt: $\Phi'(x^*) = 0$.	wahr
4.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0, 1]$ erfüllt.	wahr
5.	Es sei $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$. Wir betrachten das Sekantenverfahren zur Annäherung der Nullstelle dieser Funktion, mit Startwerten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Berechnen Sie x_2.	**0.5**
6.	Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Weiter sei x_0 so gewählt, dass die Newton Methode $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ mit Startwert x_0 gegen x^* konvergiert. Es gilt: $x^* - x_k \approx x_k - x_{k-1}$ für k hinreichend groß.	falsch
7.	Die Bisektionsmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren Funktion konvergiert nur dann, wenn die Startwerte dieser Methode in einer hinreichend kleinen Umgebung einer Nullstelle gewählt werden.	falsch
8.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton Verfahren dient dazu, die Konvergenzordnung der Methode zu erhöhen.	falsch
9.	Es sei $f(x) = e^{x^2} - 2$. Das auf f angewandte Newton Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $x^* > 0$ dieser Funktion.	wahr
10.	Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x^*, und es gelte: $f(x^*) = 0$, $\det(f'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$. Geben Sie die größte lokale Konvergenzordnung für die Newton Methode an, die Sie in diesem Fall garantieren können.	**2**

VF-6: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Zudem sei $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.
Weiterhin soll zu $f \in C^2[a, b]$ das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel.

1.	Es sei $f(x) = 4x^3 + 2$. Dann gilt $[x_0, x_1, x_2, x_3]f = 12$.	falsch
2.	Es gilt $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x_j) = f(x_j)$ für $j = 0, 1, \ldots, n$.	wahr
3.	Es gilt $\max_{x\in[a,b]} \|P(f \mid x_0, \ldots, x_n) - f(x)\| \leq \max_{x\in[a,b]} \|P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1}) - f(x)\|$.	falsch
4.	Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation.	falsch
5.	Es seien $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $f(0) = 0$ und $f(2) = 5$. Berechnen Sie $P(f\|x_0, x_1)(1)$.	**2.5**
6.	Es seien $x_0, \ldots, x_m$ die Stützstellen der Newton-Cotes Quadratur, und I_m die zugehörige Quadratur. Dann gilt: $I_m(f) = \int_a^b P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)\,dx$.	wahr
7.	Es seien $x_0, \ldots, x_m$ die Stützstellen der Gauß-Quadratur, und I_m die zugehörige Quadratur. Dann gilt: $I_m(f) = \int_a^b P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)\,dx$.	wahr
8.	Es seien $I_2(f)$ die Simpsonregel und $I_2^n(f)$ die zugehörige summierte Regel auf n Teilintervallen. Es gilt $\|I_2^n(f) - I(f)\| \to 0$ für $n \to \infty$.	wahr
9.	Bei der Gauß-Quadratur hängen die Gewichte von der Funktion f ab.	falsch
10.	Seien $a = 0$, $b = 2$ und $I_1(f)$ die Trapezregel. Berechnen Sie $I_1(x^3 + 1)$.	**10**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante, sowie

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3+\lambda \\ 2\lambda & \lambda+4 & 5\lambda+3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 13 \\ 17+3\lambda \\ 17+19\lambda \end{pmatrix}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A.

b) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe der LR-Zerlegung, und bestätigen Sie, dass man das Gleichungssystem $Ax = b$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ lösen kann.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

a)

LR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3+\lambda \\ 2\lambda & \lambda+4 & 3+5\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{c|cc} 2 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & 4 & 3+2\lambda \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & \lambda \\ \hline \lambda & 2 & 3 \end{array}\right)$$

also

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3)

b) Es ist

$$\det(A) = \det(LR) = \det(L)\det(R) = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

Offensichtlich ist damit $\det(A) \neq 0$, und das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung. **(1)**

c) Es gilt:

$$A\,x = b \Leftrightarrow L\,R\,x = b$$

Substituiere $Rx = y$ und löse $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 2 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 13 \\ 3\lambda+17 \\ 19\lambda+17 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 13 \\ 3\lambda+4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Mache im Anschluss die Substitution rückgängig:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 13 \\ 3\lambda+4 \\ 9 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(2)

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Die Funktion $y(t) := (2t-a)^2 + (\sqrt{t}-b)^2$ soll im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimal an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	0	0.25	1	4
y_i	-11	-9.1	12.4	68

Bestimmen Sie die Parameter a und b näherungsweise.

a) Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$. Geben Sie F und x explizit an.

b) Für das Gauß-Newton-Verfahren ist der Startwert $(a^0, b^0) = (0, 0)$ gegeben. Stellen Sie das zugehörige linearisierte Ausgleichsproblem für den ersten Schritt auf.

c) Führen Sie ausgehend vom Startwert aus Aufgabenteil b) einen Gauß-Newton-Schritt durch. Lösen Sie das auftretende lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen. Geben Sie $y(t)$ explizit für die gefundene Näherung von (a, b) an.

Teil a)

Die i-te Zeile der zu minimierenden Funktion $F(x) = F(a, b)$ lautet:

$$F_i(x) := y(t_i) - y_i = (2t_i - a)^2 + (\sqrt{t_i} - b)^2 - y_i \ .$$

Gesucht ist somit x^* mit $||F(x^*)||_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^2} ||F(x)||_2$ mit $x = (a, b)$ und

$$F(x) = F(a,b) = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + 11 \\ (0.5-a)^2 + (0.5-b)^2 + 9.1 \\ (2-a)^2 + (1-b)^2 - 12.4 \\ (8-a)^2 + (2-b)^2 - 68 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{(2)}$$

Teil b)

Aufgestellt werden soll

$$\left\|F(x^0) + F'(x^0)\Delta x^0\right\|_2 \to \min_{\Delta x^0 = (\Delta a^0, \Delta b^0)^T \in \mathbb{R}^2}$$

Hier ist

$$F_i'(x) = (-4t_i + 2a \qquad -2\sqrt{t_i} + 2b).$$

Damit ergibt sich:

$$\left\| \begin{pmatrix} 11 \\ 9.6 \\ -7.4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ -4 & -2 \\ -16 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a^0 \\ \Delta b^0 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{(\Delta a^0, \Delta b^0) \in \mathbb{R}^2} . \qquad \mathbf{(2)}$$

Teil c)

Die Normalgleichungen des Ausgleichsproblems **b)** sind

$$\begin{pmatrix} 273 & 73 \\ 73 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a^0 \\ \Delta b^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -5.2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \Delta a^0 \\ \Delta b^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ b^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 \\ b^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta a^0 \\ \Delta b^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Für $(a, b) = (-0.1, 0.1)$ lautet $y(t)$

$$y(t) = (2t + 0.1)^2 + (\sqrt{t} - 0.1)^2. \qquad \mathbf{(3)}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gesucht ist der Fixpunkt der Funktion

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\,\sin\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right) + \frac{1}{2} \\ \frac{y^2\,(x^2-2)+1}{8} \end{pmatrix} \quad .$$

Dieser solle iterativ mit dem Banachschen Fixpunktverfahren für Systeme bestimmt werden.

a) Zeigen Sie, dass im Gebiet $D = [-1,1] \times [-1,1]$ genau ein Fixpunkt existiert.

b) Führen Sie ausgehend von dem Startvektor $(0,0)^T$ zwei Iterationen mit dem Fixpunktverfahren aus, und geben Sie eine a-priori und eine a-posteriori Fehlerabschätzung für $(x_2, y_2)^T$ an.

Hinweis: Verwenden Sie die ∞-Norm. Sollten Sie in Teil a) kein L herausgefunden haben, so verwenden Sie $L = \frac{3}{4}$ in Teil b).

Lösung:

a) **Selbstabbildung:** $D = [-1,1] \times [-1,1]$ ist abgeschlossen.
Da $\sin(z) \in [-1,1]$ ist gilt $F_1(x,y) \in [-1/4 + 1/2, 1/4 + 1/2] = [1/4, 3/4] \subset [-1,1]$.
Für $(x,y) \in D$ ist $y^2 \in [0,1]$ und $x^2 - 2 \in [-2,-1]$. Also ist $F_2(x,y) \in [(-2+1)/8, (0+1)/8] = [-1/8, 1/8] \subset [-1,1]$.
Kontraktivität:
Da D konvex und F stetig differenzierbar ist, dürfen wir für den Nachweis der Kontraktivität eine Norm der Ableitung verwenden.

$$F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\,\cos\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)\,x & -\frac{1}{4}\,\cos\left(\frac{x^2-y^2}{2}\right)\,y \\ \frac{1}{4}\,x\,y^2 & \frac{1}{4}\,y\,\left(x^2-2\right) \end{pmatrix}$$

Nun ist $|\cos(\ldots)| \leq 1$ und für $x,\ y \in [-1,1]$ gilt $|x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ |y^2| \leq 1$ und $|x^2 - 2| \leq 2$. Daher folgt:

$$\text{Für } (x,y) \in D\ :\ \left|F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|_. \leq_. \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1 & \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1 \\ \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 1^2 & \frac{1}{4}\cdot 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \left\|F'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_\infty \leq \frac{3}{4}.$$

(Wobei $|\ldots|_.$ komponentenweise Beträge und $\leq_.$ komponentenweise $\leq$ bedeutet.)
Damit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes mit $L := \frac{3}{4}$ erfüllt. **(5)**

b) Für die Iteration erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.529230 \\ 0.121582 \end{pmatrix}$$

A-priori Abschätzung ($\mathbf{x} := (x,y)^T$):

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{L^2}{1-L}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_\infty = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1-\frac{3}{4}} \max\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{8}\right\} = \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{8} = 1.125\,.$$

A-posteriori Abschätzung:

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \frac{L}{1-L}\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|_\infty = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} \max\{0.029230,\ 0.003418\} = 3\cdot 0.029230 = 0.087690 \leq 0.0877\,.$$

(3)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	-2	-1	1	2
$f(x_i)$	1	5	1	5

a) Berechnen Sie die fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

$$\begin{array}{r|llllllll}
x_0=-2 & 1 \\
& & \searrow \\
x_1=-1 & [x_1]f & \longrightarrow & 4 \\
& & \searrow & & \searrow \\
x_2=1 & [x_2]f & \longrightarrow & [x_1,x_2]f & \longrightarrow & -2 \\
& & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
x_3=2 & [x_3]f & \longrightarrow & [x_2,x_3]f & \longrightarrow & [x_1,x_2,x_3]f & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

(Geben Sie die zu ergänzenden Werte dabei separat und mit nachvollziehbarem Rechenweg unterhalb der Aufgabenstellung an.)

b) Stellen Sie für das Interpolationspolynom $p_3(x)$ vom Grad 3 zur gegebenen Wertetabelle eine Newton-Darstellung auf. Berechnen Sie anschließend $p_3(0)$ durch Horner-artige Auswertung dieser Newton-Darstellung.

c) Für die n-ten Ableitungen von f gelte $\max_{x\in[-2,2]} |f^{(n)}(x)| \le 6\cdot n\cdot(n-1)$ für $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$. Bestimmen Sie unter dieser Annahme eine möglichst scharfe Abschätzung für $|f(0)-p_3(0)|$.

Zu a): Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&[x_1]f = f(x_1) = 5, \qquad [x_2]f = f(x_2) = 1, \qquad [x_3]f = f(x_3) = 5,\\
&[x_1,x_2]f = \frac{[x_2]f-[x_1]f}{x_2-x_1} = \frac{1-5}{1-(-1)} = -2, \qquad [x_2,x_3]f = \frac{[x_3]f-[x_2]f}{x_3-x_2} = \frac{5-1}{2-1} = 4,\\
&[x_1,x_2,x_3]f = \frac{[x_3,x_2]f-[x_2,x_1]f}{x_3-x_1} = \frac{4-(-2)}{2-(-1)} = 2. \qquad \textbf{(1)}
\end{aligned}$$

Das vollständige Newton-Schema lautet damit

$$\begin{array}{r|lllllll}
x_0=-2 & 1 \\
& & \searrow \\
x_1=-1 & 5 & \longrightarrow & 4 \\
& & \searrow & & \searrow \\
x_2=1 & 1 & \longrightarrow & -2 & \longrightarrow & -2 \\
& & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
x_3=2 & 5 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Zu (b): Die Newton-Darstellung von p_3 lautet

$$p_3(x) = 1 + 4(x+2) - 2(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)(x-1)\,.$$

Auswertung in Horner-artiger Form ergibt

$$p_3(0) = 1 + (0+2)(4+(0+1)(-2+(0-1))) = 3\,. \qquad \textbf{(2)}$$

Zu (c): Aus der Darstellung des Interpolationsfehlers und der Abschätzung für die Ableitungen folgt

$$|f(0)-p_3(0)| \le \left|\prod_{i=0}^{3}(0-x_i)\right| \max_{y\in[-2,2]} \frac{|f^{(4)}(y)|}{4!} \le (2\cdot 1\cdot 1\cdot 2)\frac{6\cdot 4\cdot 3}{24} = 12\,. \qquad \textbf{(2)}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Es sei $f(x) = \frac{1}{2}x^6 - \frac{15}{2}x^4$. Gesucht ist eine Näherung für das Integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$$

a) Approximieren Sie das Integral mit Hilfe der Simpson-Regel $I_2(f)$.

b) Berechnen Sie eine möglichst genaue Schranke für $|I(f) - I_2(f)|$ ohne $I(f)$ auszurechnen. Geben Sie dann auch eine Schranke für den relativen Fehler an. Nutzen Sie dabei, dass $I(f) = -\frac{20}{7}$.

Teil a)

Es ist $f(-1) = f(1) = -7$, und $f(0) = 0$. Also ist

$$I_2(f) = \frac{2}{6}\left(-7 + 4 \cdot 0 - 7\right) = -\frac{14}{3} = -4.6667$$

(1)

Teil b)

Das Ziel ist es, die Fehlerformel

$$|I_2(f) - I(f)| \leq \frac{1}{90}\left(\frac{h}{2}\right)^5 \|f^{(4)}\|_{\infty,[-1,1]}$$

anwenden zu können. Hier ist offensichtlich $h = 2$. Weiterhin ist

$$f^{(4)}(x) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2}x^2 - \frac{15}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 180x^2 - 180 = 180\left(x^2 - 1\right).$$

Diese Funktion hat ihr Betragsmaximum bei $x = 0$ mit einem Wert von 180.
Damit gilt

$$|I_2(f) - I(f)| \leq \frac{1}{90}\left(\frac{h}{2}\right)^5 \|f^{(4)}\|_{\infty,[-1,1]} = \frac{180}{90} = 2.$$

(2)

Damit gilt dann offensichtlich für den relativen Fehler:

$$\frac{|I_2(f) - I(f)|}{|I(f)|} \leq \frac{2}{\frac{20}{7}} = 0.7.$$

(1)