Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Dezimalzahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an.

Original - d.h. unvertauschte Reihenfolge

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.		
1.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert = \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x(1+\epsilon)$.	falsch
2.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \le \text{eps}$, so dass gilt: $\lvert\text{fl}(x) - x\rvert \le \epsilon\lvert x\rvert$.	wahr
3.	Die Anzahl der Elemente in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ hängt nicht von b ab.	falsch
4.	Die Zahl 21 ist in $\mathbb{M}(4,2,-8,8)$ exakt darstellbar.	falsch
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 16 in $\mathbb{M}(3,8,-8,8)$ an.	**121**
6.	Die Funktion $f(x,y) = ye^x$ is für alle (x,y) mit $\lvert x\rvert \le 1$ gut konditioniert.	wahr
7.	Je besser die Kondition eines Problems, desto stabiler sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems.	falsch
8.	Die Addition zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer gut konditioniert.	wahr
9.	Es seien $x = 2$ und $y = 2 + 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $e^x - e^y$ tritt Auslöschung auf.	wahr
10.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x)$ der Funktion $f(x) = e^{x^3}$ an der Stelle $x = 2$.	**24**

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.		
1.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\lVert B\rVert_\infty = 1$.	wahr
2.	Es sei $A = L\,R$ eine $L\,R$-Zerlegung von A. Dann gilt: $\det(A) = \det(R)$.	wahr
3.	Es sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl bzgl. $\lVert\cdot\rVert$. Bei Störung der Eingabedaten b ist der relative Fehler in der Lösung $\frac{\lVert\tilde{x}-x\rVert}{\lVert x\rVert}$ immer um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler $\frac{\lVert\tilde{b}-b\rVert}{\lVert b\rVert}$.	falsch
4.	Für die Konditionszahl der Matrix A gilt $\kappa(A^2) = \kappa(A)^2$.	falsch
5.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ symmetrisch, mit Eigenwerten $2, 3, 5, 8$. Berechnen Sie $\kappa_2(A)$.	**4**
6.	Pivotisierung verbessert die Kondition des Gleichungssytems $A\,x = b$.	falsch
7.	Es sei $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung x und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Es gilt: $\lVert x-\tilde{x}\rVert \le \lVert A^{-1}\rVert\lVert r\rVert$.	wahr
8.	Es existiert stets eine Permutationsmatrix P, eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $P\,A = L\,R$ gilt.	wahr
9.	Es sei A eine untere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung des Gleichungsssytems $A\,x = b$ über Vorwärtseinsetzen beträgt etwa $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.	wahr
10.	Berechnen Sie $\lVert A\rVert_1$ für $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.	**9**

VF-3: Cholesky- und QR-Zerlegung		
1.	Es sei $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix A. Dann ist $\det(A) > 0$.	wahr
2.	Es sei A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$-Matrix. Dann existieren stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = L\,D\,L^T$ gilt.	wahr
3.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten $n \times n$-Matrix über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen (gem. Vorlesung).	wahr
4.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	falsch
5.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^T v}$ eine Householder-Transformation. Geben Sie $\det(Q_v)$ an.	**-1**
6.	Es sei $A = QR$ eine QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt: $\det(A) = \det(R)$.	falsch
7.	Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so dass $A = QR$ gilt.	wahr
8.	Für jede orthogonale Matrix Q gilt $Q^{-1} = Q$.	falsch
9.	Für jede orthogonale Matrix Q gilt $\kappa_2(Q) = 1$, wobei $\kappa_2(Q)$ die Konditionszahl der Matrix Q bezüglich der 2-Norm ist.	wahr
10.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^T v}$ eine Householder-Transformation. Weiter sei $y = Q_v \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Geben Sie $\|y\|_2^2$ an.	**26**

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt. Weiter seien $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ und $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b.		
1.	Es gilt $\det(R) \neq 0$.	wahr
2.	Je kleiner der Winkel Θ, desto besser ist die Stabiliät der Householder Methode zur Bestimmung von x^*.	falsch
3.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$.	falsch
4.	Die Matrix R kann man über Householder Transformationen angewandt auf A bestimmen.	wahr
5.	Bestimmen Sie $\|A^T(Ax^* - b)\|_2$.	**0**
6.	Es sei $Q = H_k\,\ldots\,H_2\,H_1$ ein Produkt von k Householder Transformationen. Es gilt $Q = Q^T$.	falsch
7.	Die Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist lokal quadratisch konvergent.	falsch
8.	Bei der Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems muss in jeder Iteration dieser Methode ein lineares Ausgleichsproblem gelöst werden.	wahr
9.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist die Systemmatrix des linearisierten Ausgleichsproblems in jedem Schritt stets symmetrisch positiv definit.	falsch
10.	Es seien $m = 3$, $n = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie x^*.	**2**

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.		
1.	Das Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.	wahr
2.	Falls $\\|\Phi'(x^*)\\| = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\\|x_0 - x^*\\|$ hinreichend klein und die Konvergenzordnung ist mindestens zwei.	wahr
3.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos(x)$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0, 1]$ erfüllt.	falsch
4.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = 0.1 + \frac{1}{2}\sin(x)$. Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$.	wahr
5.	Es sei $0 < \\|\Phi'(x^*)\\| < 1$. Geben Sie die Konvergenzordnung an, mit der die Fixpunktiteration lokal konvergiert.	**1**
6.	Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$. Weiter sei x_0 so gewählt, dass die Newton Methode $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ mit Startwert x_0 gegen x^* konvergiert. Dann gilt für hinreichend große k: $\|x^* - x_k\| \approx (x_k - x_{k+1})^2$.	falsch
7.	Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei $x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1} f(x_k)$, mit $\det(f'(x_k)) \neq 0$, eine Iteration des Newton-Verfahrens. Es gilt: x_{k+1} ist die Nullstelle der linearen Taylor-Annäherung von f an der Stelle x_k.	wahr
8.	Das vereinfachte Newton-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.	falsch
9.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren dient dazu, den Einzugsbereich der Methode zu erweitern.	wahr
10.	Es sei $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$. Wir betrachten die Bisektionsmethode zur Annährung der Nullstelle dieser Funktion, mit Startwerten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Berechnen Sie x_3.	**0.75**

VF-6: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Es sei $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f. Weiterhin soll zu $f \in C[a, b]$ das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ durch eine Quadraturformel $I_m(f) = (b - a)\sum_{j=0}^m w_j f(\hat{x}_j)$ mit $a \leq \hat{x}_0 < \ldots < \hat{x}_m \leq b$ numerisch approximiert werden. Ferner sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.		
1.	Es gilt $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = (x - x_{n-1})[x_0, \ldots, x_n]f + P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ für alle x.	falsch
2.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \|P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\|$ hängt von der Wahl der Stützstellen ab.	wahr
3.	Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $P(f \mid x_0, x_1, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0)(x)$.	wahr
4.	Bei der Gauss-Quadratur gilt $I_m(f) = I(f)$, falls f ein Polynom vom Grad $2m + 1$ ist.	wahr
5.	Es sei $f(x) = 5x^3 + x^2 + 2$. Bestimmen Sie $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$.	**5**
6.	Bei den Newton-Cotes-Formeln gilt $\hat{x}_j = a + j\frac{b-a}{m}$.	wahr
7.	Es sei $I_1(f)$ die Trapezregel. Dann gilt $\|I_1^n(f) - I(f)\| \to 0$ für $n \to \infty$.	wahr
8.	Bei der Gauss-Quadratur hängen die Stützstellen $\hat{x}_j$ von der Funktion f ab.	falsch
9.	Bei der Gauss-Quadratur gilt $w_j \geq 0$ für alle j.	wahr
10.	Berechnen Sie $\int_0^1 3\sin(\pi x)\,dx$ approximativ mit der Simpsonregel für die Schrittweite $h = 1$.	**2**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Konstante, sowie

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \\ 12 & 3-2\alpha & 3\alpha-10 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 14-5\alpha \end{pmatrix}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A in Abhängigkeit von α (ohne Pivotisierung). Geben Sie L und R explizit an.

b) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe der LR-Zerlegung. Ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar? Geben Sie jene α an, für welche dies der Fall ist.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen, wobei angenommen wird, dass A nicht singulär sei.

a)

LR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -1 \\ 12 & 3-2\alpha & 3\alpha-10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2\alpha & 3\alpha-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & \alpha & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

also

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}.$$

(3)

b) Es ist

$$\det(A) = \det(LR) = \det(L)\det(R) = 1 \cdot 4 \cdot (-2) \cdot (\alpha - 1) = 8 \cdot (1-\alpha).$$

Nur für $\alpha = 1$ ergibt sich $\det(A) = 0$, und damit hat das Gleichungssystem für $\alpha \neq 1$ eine eindeutige Lösung. **(1)**

c) Es gilt:

$$Ax = b \Leftrightarrow LRx = b$$

Substituiere $Rx = y$ und löse $Ly = b$ (Vorwärtseinsetzen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & \alpha & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 14-5\alpha \end{pmatrix}, \qquad \textit{also} \qquad y = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ \alpha-1 \end{pmatrix}.$$

Mache im Anschluss die Substitution rückgängig (Rückwärtseinsetzen – $Rx = y$):

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ \alpha-1 \end{pmatrix}, \qquad \textit{also} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

Aufgabe 2 (7 Punkte)

y_i	0	1	0.5
z_i	1	0	0.5

Die Werte in der oben gegebenen Tabelle gehorchen näherungsweise dem Gesetz

$$\frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{b} = 1.$$

Ziel dieser Aufgabe ist die Bestimmung optimaler Parameter (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) a und b.

a) Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$. Geben Sie F und x explizit an.

b) Für das Gauß-Newton-Verfahren ist der Startwert $(a^0, b^0) = (1,1)$ gegeben. Stellen Sie das zugehörige linearisierte Ausgleichsproblem für den ersten Schritt auf und bestimmen Sie (a^1, b^1).

c) Ein optimaler Wert für a und b ist $a = b = 0.9$. Geben Sie das Residuum für diesen Wert an.

Teil a)
Die i-te Zeile der zu minimierenden Funktion $F(x) = F(a,b)$ lautet:

$$F_i(x) := \frac{y_i^2}{a} + \frac{z_i^2}{b} - 1.$$

Gesucht ist somit x^* mit $||F(x^*)||_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^2} ||F(x)||_2$ mit $x = (a,b)$ und

$$F(x) = F(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} - 1 \\ \frac{1}{a} - 1 \\ \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} - 1 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{(2)}$$

Teil b)
Aufgestellt werden soll

$$\left\|F(x^0) + F'(x^0)\Delta x^0\right\|_2 \to \min_{\Delta x^0 = (\Delta a^0, \Delta b^0)^T \in \mathbb{R}^2}$$

Hier ist

$$F_i'(x) = \left(-\frac{y_i^2}{a^2}, -\frac{z_i^2}{b^2}\right).$$

Damit ergibt sich:

$$\left\|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta a^0 \\ \Delta b^0 \end{pmatrix}\right\|_2 \to \min_{(\Delta a^0, \Delta b^0)^T \in \mathbb{R}^2}.$$

Die Normalengleichungen sind

$$\begin{pmatrix} \frac{17}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{17}{16} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta a^0 \\ \Delta b^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

mit Lösung

$$\begin{pmatrix} \Delta a^0 \\ \Delta b^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Damit ist $(a^1, b^1) = \left(\frac{8}{9}, \frac{8}{9}\right) = (0.88889, 0.88889)$. **(4)**

Teil c)
Für $a = b = 0.9$, d.h. $x = (0.9, 0.9)$ ist $\|F(x)\|_2$ zu berechnen:

$$\left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{0.9} - 1 \\ \frac{1}{0.9} - 1 \\ \frac{1}{2\cdot 0.9} - 1 \end{pmatrix}\right\|_2 = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0.47140. \qquad \mathbf{(1)}$$

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 + 2\,x + y &= 4 \\ y^2 - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} &= \frac{33}{4} \end{aligned}$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).

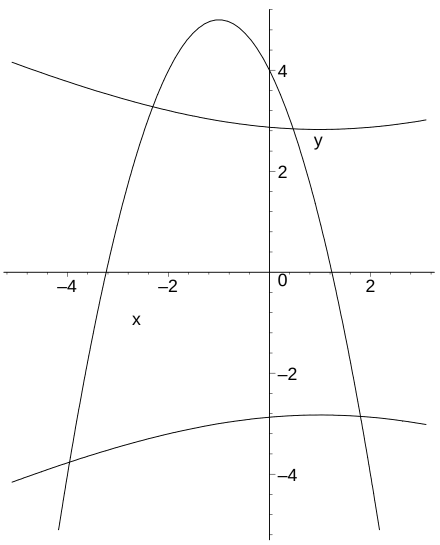
b) Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 4. Quadranten für beide Verfahren

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} ,$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.

Bem.: Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.

Teil a) Skizze: Parabel $y = 5 - (x+1)^2$ und Hyperbel $\frac{y^2}{8} - \frac{(x-1)^2}{32} = 1$ oder Wertetabelle zu $y = \pm\sqrt{\frac{33+x^2-2\,x}{4}}$. Zu skizzieren ist der gesamte Bereich mit Schnittstellen:



Startwerte:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2)

Teil b) Newton-Verfahren:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y + x^2 + 2 \cdot x - 4 \\ y^2 - 1/4 \cdot x^2 + 1/2 \cdot x - 33/4 \end{pmatrix} \to f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + 2 & 1 \\ -1/2 \cdot x + 1/2 & 2 \cdot y \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 & | & 3 \\ 0 & -4 & | & 4 \end{pmatrix} \to \Delta\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & 1 & | & -1 \\ -0.5 & -6 & | & -0.75 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 6 & 1 & | & -1 \\ 0 & -5.91667 & | & -0.833333 \end{pmatrix} \to \Delta\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -0.190141 \\ 0.140845 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1.80986 \\ -2.85915 \end{pmatrix}$$

(5)

Vereinfachtes Newton-Verfahren (erster Schritt und $f(\mathbf{x}_1)$ vom Newton-Verfahren):

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 1 & | & -1 \\ 0 & -4 & | & -0.75 \end{pmatrix} \to \Delta\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -0.296875 \\ 0.1875 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1.70313 \\ -2.8125 \end{pmatrix}$$

(2)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für die Funktion

$$F(x) = \int_0^x e^{\sin(t)} dt$$

ist eine Wertetabelle gegeben.

x	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$F(x)$	-0.18133	0	0.22132	0.49037	0.81355	1.1944	1.6319

a) Gesucht ist eine Näherung für $F(0.25)$ mit der Hilfe eines Polynoms zweiten Grades. Berechnen Sie den entsprechenden Näherungswert mit dem Neville-Aitken-Schema und begründen Sie die Wahl der Stützstellen.

b) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für den in Aufgabenteil a) berechneten Näherungswert an.

Hinweis: Es gelten $F^{(2)}(x) = e^{\sin(x)} \cos(x)$, $F^{(3)}(x) = e^{\sin(x)}(\cos^2(x) - \sin(x))$, $F^{(4)}(x) = -e^{\sin(x)} \cos(x)(\sin^2(x) + 3\sin(x))$.

Zu (a): Für ein Polynom zweiten Grades müssen wir drei Stützstellen nehmen. Für die Stelle $x = 0.25$ wird der Anteil des Knotenpolynoms am Fehler durch die Wahl der Stützstellen 0, 0.2 und 0.4 minimiert. Das dazu gehörige Neville-Aitken Tableau lautet damit

$$\begin{array}{r|lllll}
x_0 = 0 & 0 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_1 = 0.2 & 0.22132 & \longrightarrow & 0.27665 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
x_2 = 0.4 & 0.49037 & \longrightarrow & 0.28858 & \longrightarrow & \mathbf{0.28411}
\end{array}$$

Also ist $F(0.25) \approx p_2(0.25) = 0.28411$. **(2)**

Zu (b): Die Fehlerabschätzung ist gegeben durch

$$|F(x) - p_2(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)| \max_{y \in [x_0, x_2]} \frac{|F^{(3)}(y)|}{3!}$$

mit $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$.

Im Intervall $[0, 0.4]$ sind $sin(x)$ und $cos(x)$ beide ≥ 0 und damit gilt $F^{(4)}(x) = -e^{\sin(x)} \cos(x)(\sin^2(x) + 3\sin(x)) \leq 0$.

Somit ist $F^{(3)}(x)$ monoton fallend und $\max_{y \in [x_0, x_2]} |F^{(3)}(y)| = \max\left\{|F^{(3)}(0)|, |F^{(3)}(0.4)|\right\} = 1$. Also

$$|F(0.25) - p_2(0.25)| \leq 0.25 \cdot 0.05 \cdot 0.15 \cdot \frac{1}{6} = \frac{0.0001 \cdot 5}{16} = 0.0003125$$

(2)

Zum Vergleich: Der tatsächliche Wert ist $F(0.25) \approx 0.283827$, also $|F(0.25) - p_2(0.25)| \approx 0.000283$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung für das Integral

$$I(f) = \int_0^1 \sin(e^x)dx.$$

Berechnen Sie mit der summierten Mittelpunktsregel eine Näherung, die vom exakten Wert um höchstens 0.12 abweicht. Geben Sie den berechneten Näherungswert explizit an.
Hinweis: Im Intervall $[0,1]$ hat $f^{(3)}(x)$ genau eine Nullstelle bei $x_E = 0.92606$.

Lösung:
Für den Fehler der summierten Mittelpunktsregel gilt

$$|I_0^n(f) - Q(f)| \leq \frac{b-a}{24} h^2 \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)| = \frac{(b-a)^3}{24\, n^2} \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)| \overset{!}{\leq} 0.12$$

Die Ableitungen lauten

$$f'(x) = e^x \cos(e^x) \qquad f^{(2)}(x) = e^x \cos(e^x) - e^{2x} \sin(e^x).$$

Weil $f^{(3)}(x)$ in $[0,1]$ nur das im Hinweis genannte Extremum hat, reichet es, die Randwerte und das lokale Extremum zu betrachten . Also

$$\max_{x\in[0,1]} \left|f^{(2)}(x)\right| = \max\left\{\left|f^{(2)}(0)\right|, \left|f^{(2)}(x_E)\right|, \left|f^{(2)}(1)\right|\right\} = \max\{0.30117,\, 5.7468,\, 5.5136\} = 5.7468\,.$$

Damit erhalten wir für n die Bedingung

$$n \geq \sqrt{\frac{(1-0)^3}{24 \cdot 0.12} \cdot 5.7468} = 1.4126 \qquad (= 1.4\ldots).$$

Also reicht $n = 2$. **(3)**

$$I_0^2 = 0.5 \cdot \left(\sin(e^{0.25}) + \sin(e^{0.75})\right) = 0.90683.$$

(1)

Zum Vergleich: Der tatsächliche Wert ist I = 0.87496.