Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Dezimalzahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an.

Original - d.h. unvertauschte Reihenfolge

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.		
1.	Es gilt $\lvert\text{fl}(x+y)\rvert \le \lvert\text{fl}(x)\rvert + \lvert\text{fl}(y)\rvert$ für alle $x, y \in \mathbb{D}$.	falsch
2.	Es gilt $\text{eps} = \frac{m^{1-b}}{2}$.	falsch
3.	In $\mathbb{M}(2,8,-2,2)$ ist $x_{\text{MIN}} = \frac{1}{8}$.	wahr
4.	Die Funktion $f(x) = x\ln(x)$ ist gut konditioniert für $x \to \infty$.	wahr
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 23 in $\mathbb{M}(7,6,-8,8)$ an.	**32**
6.	Die Funktion $f(x,y) = \frac{x}{y}$ ist für alle (x,y) mit $y \neq 0$ gut konditioniert.	wahr
7.	Wir betrachten die Berechnung einer Summe $S_m := \sum_{j=1}^{m} x_j$. Die Stabilität dieser Summenbildung hängt von der Reihenfolge der Summanden x_j ab.	wahr
8.	Ein Algorithmus zur numerischen Lösung eines Problems ist stabil, wenn das vorliegende Problem gut konditioniert ist.	falsch
9.	Für schlecht konditionierte Probleme gibt es keine stabilen Algorithmen zur Lösung des Problems.	falsch
10.	Es seien $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ und $\tilde{x}$ ein Näherungswert für $x = 2$, der mit einem relativen Fehler von maximal 2% behaftet ist. Bestimmen Sie in erster Näherung eine (scharfe) Schranke für den relativen Fehler in $f(\tilde{x})$ als Annäherung für $f(x)$.	**0.032**

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.		
1.	Es sei $B := DA$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $Bx^* = b$.	falsch
2.	Es seien $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung x^* und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Es gilt $\frac{\lVert r\rVert}{\lVert b\rVert} \le \kappa(A)\frac{\lVert x^*-\tilde{x}\rVert}{\lVert x^*\rVert}$, mit $\kappa(A) := \lVert A\rVert\lVert A^{-1}\rVert$.	wahr
3.	Es existiert immer eine QR-Zerlegung $A = QR$ von A.	wahr
4.	Es sei $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A. Dann gilt $Rx^* = Qb$.	falsch
5.	Es seien $\kappa_\infty(A)$ die Konditionszahl bzgl. der Maximumnorm und $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\kappa_\infty(A)$.	**9**
6.	Es existieren stets eine Permutationsmatrix P, eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $PA = LR$ gilt.	wahr
7.	Es sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung y von $Ry = b$ über Rückwärtseinsetzen beträgt etwa $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.	falsch
8.	Ohne Pivotisierung ist die Gauss-Elimination nicht für jedes A durchführbar.	wahr
9.	Falls die Matrix A orthogonal ist, gilt $\kappa_2(A) = 1$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. der euklidischen Norm ist.	wahr
10.	Es seien $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechnen Sie $\lVert D\rVert_2$.	**0.25**

VF-3:		
1.	Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ existiert eine Cholesky-Zerlegung.	falsch
2.	Es sei $A = LDL^T$ die Cholesky-Zerlegung der positiv definiten Matrix A. Dann gilt $A^{-1} = LD^{-1}L^T$.	falsch
3.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten $n \times n$-Matrix über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{2} n^2$ Operationen.	falsch
4.	Für jede symmetrische orthogonale Matrix Q gilt $Q^2 = I$.	wahr
5.	Es sei $A = LDL^T$ mit $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix}$. Geben Sie $\det(A^{-1})$ an.	**0.2**
6.	Das Produkt zweier Householder-Transformationen ist eine Spiegelung.	falsch
7.	Das Produkt zweier Givens-Transformationen ist eine Rotation.	wahr
8.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Dann gilt: $Q_v v = -v$.	wahr
9.	Eine QR-Zerlegung $A = QR$ von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert nur dann, wenn die Matrix A den vollen Spaltenrang n hat.	falsch
10.	Es seien $v, x \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$, $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Geben Sie $\|Q_v x\|_2^2$ an.	**10**

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ferner seien $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ und $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen Ax^* und b.		
1.	Es gilt $\det(\tilde{R}) \neq 0$.	wahr
2.	Es gilt $\tilde{R}x^* = Qb$.	falsch
3.	Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(\tilde{R})$.	wahr
4.	Je kleiner der Winkel Θ, desto besser ist die Stabilität des Lösungsverfahrens über die QR-Zerlegung.	falsch
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Θ.	**0**
6.	Es sei $LDL^T = A^TA$ die Cholesky-Zerlegung von A^TA. Dann gilt $x^* = L^{-T}D^{-1}L^{-1}A^Tb$.	wahr
7.	Die Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems kann man als Fixpunktiteration darstellen.	wahr
8.	Bei der Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist die Konvergenzordnung in der Regel zwei.	falsch
9.	Eine geeignete Wahl des skalaren Parameters μ im Levenberg-Marquardt-Verfahren kann den Einzugsbereich der Methode erweitern.	wahr
10.	Es seien $m = 3$, $n = 1$ und $Qb = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|Ax^* - b\|_2$.	**5**

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.		
1.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$, ist die lokale Konvergenzordnung der Fixpunktiteration mindestens 2.	wahr
2.	Falls die Fixpunktiteration konvergiert, so gilt $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.	falsch
3.	Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle eines Gleichungssystems $f(x) = 0$ kann man als Fixpunktiteration darstellen.	wahr
4.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0, 1]$ erfüllt.	falsch
5.	Es seien $n = 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Weiter sei $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Bestimmen Sie $\Phi'(x^*)$.	**0**
6.	Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(M) \neq 0$, und $\Phi(x) := x - Mf(x)$. Das Nullstellenproblem $f(x) = 0$ hat dieselbe Lösungen wie das das Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$.	wahr
7.	Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Sei x_0 so gewählt, dass die Newton Methode $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ mit Startwert x_0 gegen x^* konvergiert. Es gilt: $x^* - x_k \approx x_{k+1} - x_k$ für k hinreichend groß.	wahr
8.	Die Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren Funktion konvergiert nur dann wenn die Startwerte x_0, x_1 dieser Methode so gewählt werden, dass $f(x_0)f(x_1) < 0$ gilt.	falsch
9.	Es sei $f(x) = x^2 - 2$. Das auf f angewandte Newton Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $x^* > 0$ dieser Funktion.	wahr
10.	Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^*, und es gelte $f(x^*) = 0$, $\det(f'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$. Geben Sie die lokale Konvergenzordnung an, mit der die Newton Methode für diesen Fall mindestens konvergiert.	**2**

VF-6: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Es sei $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt $P(Q \mid x_0, \ldots, x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n.	wahr
2.	Es gilt $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_{n-1}, \ldots, x_0)(x) + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})[x_0, \ldots, x_n]\, f$.	wahr
3.	Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Dann gilt $a_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$.	wahr
4.	Es gilt $\max_{x\in[a,b]} \lvert P(f \mid x_0, \ldots, x_n) - f(x)\rvert \leq \max_{x\in[a,b]} \lvert P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1}) - f(x)\rvert$.	falsch
5.	Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $f(x_0) = 0$ und $f(x_1) = 4$. Berechnen Sie $P(f \mid x_0, x_1)(\frac{7}{4})$.	**3**
Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $I_m(f) = (b-a) \sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.		
6.	Es seien $I_m^{NC}(f)$ und $I_m^{G}(f)$ die Newton-Cotes und die Formel der Gauss-Quadratur. Für $m \geq 1$ gilt, dass der Exaktheitsgrad von $I_m^{NC}(f)$ strikt kleiner ist als der von $I_m^{G}(f)$.	wahr
7.	Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_m)$ das Lagrange–Interpolationspolynom. Bei der Gauss-Quadratur gilt $I_m(f) = \int_a^b P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)\, dx$.	wahr
8.	Es seien $f \in C^4[a, b]$ und $I_2(f)$ die Simpsonregel. Es gilt $\lvert I_2^n(f) - I(f)\rvert \leq ch^5$, wobei die Konstante c nicht von n abhängt.	falsch
9.	Bei der Gauss-Quadratur hängen die Stützstellen x_j von der Funktion f ab.	falsch
10.	Es seien $a = 0$, $b = 1$ und $I_2(f)$ die Simpsonregel. Berechnen Sie den Fehler $I(x^3 + 1) - I_2(x^3 + 1)$.	**0**

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Es sei $\alpha \in [-1, 1]$ ein Parameter, sowie

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 3 & 1 & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} & 3\alpha - \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad b(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{35}{4} \\ 5 \\ 8\alpha + \frac{11}{2} \end{pmatrix}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist die Lösung des Gleichungssystems $A(\alpha) \cdot x(\alpha) = b(\alpha)$.

a) Bestimmen Sie die $L\,R$-Zerlegung von A in Abhängigkeit von α mit Pivotisierung (jedoch ohne Zeilenäquilibrierung), d. h. $PA = LR$. Geben Sie $L(\alpha)$, $R(\alpha)$ und $P(\alpha) = P$ explizit an.
Hinweis: Es ist wichtig den Wertebereich von α zu beachten!

b) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe der $L\,R$-Zerlegung.
Ist das Gleichungssystem $A(\alpha) \cdot x(\alpha) = b(\alpha)$ für alle $\alpha \in [-1, 1]$ eindeutig lösbar? Geben Sie jene α an, für welche dies der Fall ist.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen, wobei angenommen wird, dass $A(\alpha)$ vollen Spaltenrang hat.

a) LR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 3 & 1 & -3 \\ \frac{3}{2} & \frac{1-\alpha}{2} & 3\alpha - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Pivot(2,1,3)}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{1-\alpha}{2} & 3\alpha - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\alpha}{2} & 3\alpha + 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \alpha & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

also

$$L(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.75 & 1 & 0 \\ 0.5 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \qquad R(\alpha) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -0.5 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(3)

b) Es gilt: $\det(PA) = \det(LR) \;\Leftrightarrow\; \det(P) \cdot \det(A) = \det(L) \cdot \det(R)$ und somit

$$\det(A) = \frac{\det(L) \cdot \det(R)}{\det(P)} = \frac{1 \cdot \left[3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1 + \alpha)\right]}{-1^{\#Zeilenvertauschungen}} = \frac{3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (\alpha + 1)}{-1} = \frac{3}{2} \cdot (1 + \alpha).$$

Nur für $\alpha = -1$ ergibt sich $\det(A) = 0$. Gefragt ist nach den $\alpha \in [-1, 1]$, für die eine eindeutige Lösung existiert. Die Antwort lautet also: Für $\alpha \in (-1, 1]$ existiert eine eindeutige Lösung. **(1)**

c) Es gilt: $P\,A\,x = Pb \Leftrightarrow L\,R\,x = Pb$
Substituiere $Rx = y$ und löse $Ly = Pb$ (Vorwärtseinsetzen):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \alpha & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{35}{4} \\ 8\alpha + \frac{11}{2} \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad y = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3\alpha + 3 \end{pmatrix}.$$

Mache im Anschluss die Substitution rückgängig (Rückwärtseinsetzen):

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \alpha + 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3\alpha + 3 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(2)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

x_i	$-\sqrt{15}/5$	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{15}/5$
y_i	2.56	1.77	-3.21	-1.78	2.57

Die Werte in der oben gegebenen Tabelle gehorchen näherungsweise dem Gesetz

$$y(x) = e^{\alpha}(5x^3 - 3x) + \beta(3x^2 - 1)\ .$$

Bestimmen Sie die Parameter α und β optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate.

a) Formulieren Sie dazu das entsprechende lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$. Geben Sie A, b und x explizit an.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems über die Normalengleichungen und geben Sie α und β explizit an.

c) Berechnen Sie das Residuum für die in b) gefundenen Parameter.

a) Zunächst substituieren wir e^{α} durch $\tilde{\alpha}$ und stellen dann die Beziehung

$$y_i(\tilde{\alpha}, \beta) = \tilde{\alpha}(5x_i^3 - 3x_i) + \beta(3x_i^2 - 1)$$

auf und erhalten daraus die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5x_1^3 - 3x_1 & 3x_1^2 - 1 \\ \vdots & \vdots \\ 5x_5^3 - 3x_5 & 3x_5^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.8 \\ \frac{4}{9}\cdot\sqrt{3} \approx 0.76980 & 0 \\ 0 & -1 \\ -\frac{4}{9}\cdot\sqrt{3} \approx -0.76980 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Die rechte Seite b ergibt sich direkt aus den Werten y_i

$$b = \begin{pmatrix} 2.56 \\ 1.77 \\ -3.21 \\ -1.78 \\ 2.57 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Lösungsvektor ergibt sich zu $x = (\tilde{\alpha}, \beta)^T$. **(2)**

b) Um das System $A^T A\, x^* = A^T b$ zu lösen muss zunächst

$$A^T A = \begin{pmatrix} \frac{32}{27} \approx 1.1852 & 0 \\ 0 & 2.28 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^T b = \begin{pmatrix} 2.7328 \\ 7.3140 \end{pmatrix}$$

berechnet werden. Daraus ergibt sich der gesuchte Lösungsvektor zu

$$x^* = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3058 \\ 3.2079 \end{pmatrix}$$

Somit erhält man $\alpha = \ln(\tilde{\alpha}) = 0.83542$ und $\beta = 3.2079$; also

$$y(x) = e^{0.83542}\cdot(5x^3 - 3x) + 3.2079\cdot(3x^2 - 1)$$

(3)

c) Für Residuum ergibt sich

$$\|r\|_2 = \|Ax^* - b\|_2 = 1.0387\cdot 10^{-2}$$

(1)

Aufgabe 3 (9 Punkte)
Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + x\,(1-x)\,y\,(1-y) \\ \frac{1}{2}\,(1+x-y) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y)\ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0,1] \times [0,1]$ erfüllt sind. Verwenden Sie die $\|\cdot\|_1$-Norm.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0,\ 0)$ zwei Fixpunktschritte durch, d. h. berechnen Sie (x_2, y_2).

c) Geben Sie eine a-priori- und eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) unter Verwendung der $\|\cdot\|_1$-Norm an.

d) Wie viele Iterationsschritte/Fixpunktschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0,\ 0)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\|\cdot\|_1$-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-5}$ anzunähern?

zu a)
i) E ist abgeschlossen.
ii) **Selbstabbildung:** Wegen $(x,y) \in [0,1]^2$ gilt $x\,(1-x) \in [0, \frac{1}{4}]$, $y\,(1-y) \in [0, \frac{1}{4}]$ (Parabeln der Form $(x-x_0)\,(x-x_1)$ haben ihr Extremum an der Stelle $(x_0 + x_1)/2$) und $x - y \in [-1, 1]$. Daraus folgt

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 0 \le F_1(x,y) = \frac{1}{4} + x\,(1-x)\,y\,(1-y) \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16} < 1$$
$$0 = \frac{1}{2}\,(1 + (-1)) \le F_2(x,y) = \frac{1}{2}\,(1+x-y) \le \frac{1}{2}\,(1+1) = 1$$

Insgesamt gilt also $F(E) \subset E \Rightarrow F$ ist selbstabbildend auf $\subset E$.

iii) **Kontraktivität:** Da E konvex ist und F stetig differenzierbar ist, dürfen wir die Ableitung benutzen. Als Jacobi-Matrix ergibt sich

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} (1-2\,x)\,y\,(1-y) & (1-2\,y)\,x\,(1-x) \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wegen $(x,y) \in E = [0,1]^2$ gilt (s.o.) $x\,(1-x) \in [0, \frac{1}{4}]$, $y\,(1-y) \in [0, \frac{1}{4}]$ und $1 - 2\,x \in [-1, 1]$ so dass wir durch elementweise Betragsabschätzung (zulässig in der $\|\cdot\|_1$- und $\|\cdot\|_\infty$-Norm, nicht jedoch in der $\|\cdot\|_2$-Norm) erhalten:

$$\|F'(x,y)\|_1 \le \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\|_1 =: \|F'_{max}\|_1\ .$$

(Hier können wir nur die 1-Norm verwenden, denn $\|F'_{max}\|_\infty = 1$!!). Es ist $\|F'_{max}\|_1 = \frac{3}{4} = 0.75 =: L$; d.h. F ist kontraktiv auf E.

Somit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

(5)

zu b)

Startwert: $x^0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Schritt: $x^1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und für c) $x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. Schritt: $x^2 := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{64} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.296875 \\ 0.375 \end{pmatrix}$, $x^2 - x^1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{64} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.046875 \\ -0.125 \end{pmatrix}$

(1)

zu c) Es ist $\|x^1 - x^0\|_1 = 3/4$ und somit gemäß a-priori-Abschätzung

$$\|x^2 - x^*\|_1 \le \frac{L^2}{1-L}\,\|x^1 - x^0\|_1 = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 - \frac{3}{4}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{16} = 1.6875\ (< 1.7)\ .$$

Es ist $\|x^2 - x^1\|_1 = 11/64$ und somit gemäß a-posteriori-Abschätzung

$$\|x^2 - x^*\|_1 \leq \frac{L}{1-L}\,\|x^2 - x^1\|_1 = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} \cdot \frac{11}{64} = \frac{33}{64} = 0.515625\ (< 0.52)\ .$$

(2)

zu d) Es gilt gemäß a-priori-Abschätzung

$$\|x^n - x^*\|_1 \leq \tfrac{L^n}{1-L}\,\|x^1 - x^0\|_1 \overset{!}{\leq} \varepsilon \Longleftrightarrow$$

$$n \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^1-x^0\|}}{\ln L} = \frac{\ln\left(\frac{3\cdot 10^{-5}\cdot\frac{1}{4}}{3/4}\right)}{\ln\frac{3}{4}} = \frac{\ln 10^{-5}}{\ln(3/4)} = \frac{5\cdot\ln 10}{\ln 4 - \ln 3} = 40.01\ldots \quad .$$

Es sind also höchstens $n = 41$ Schritte erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-5}$ zu erreichen.

(1)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Funktion (das Integral)

$$F(x) = \int_0^x \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$$

ist als Tabelle gegeben.

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$F(x)$	-0.001339	-0.01084	-0.03739	-0.09158	-0.1875	-0.3473	-0.6159

Berechnen Sie einen möglichst guten Näherungswert für $F(1.1)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung von drei Tabellenwerten und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

Hinweis:

$$F'(x) = \ln(\cos x) \to F''(x) = -\tan x \to F^{(3)}(x) = -\left(1+\tan^2 x\right) \to F^{(4)}(x) = -2\tan x\left(1+\tan^2 x\right).$$

Achtung: Dass die Stützstellenwahl den Fehler minimiert ist ohne Betrachtung der Ableitung unzureichend (nur der Anteil des Knotenpolynoms wird minimiert!).

Die Benutzung von 3 Tabellenwerten entspricht der Interpolation mit einem quadratischen Polynom p_2. Da $\bar{x} = 1.1$ gilt, wird der das Knotenpolynom betreffende Anteil durch die Stützstellenwahl $(0.8, 1.0, 1.2)$ (wegen der Ableitung besser) und $(1.0, 1.2, 1.4)$ minimiert.

Tableau für beide Berechnungen:

x_i	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
0.8	-0.09158		
1.0	-0.1875	-0.23546	
1.2	-0.3473	-0.2674	-0.259415
1.4	-0.6159	-0.213	-0.2538

Damit erhalten wir die Näherung $F(1.1) \approx p_2(1.1) = P_{2,2} = -0.25942$ (bzw. $P_{2,2} = -0.2538$). **(2)**

Die Fehlerabschätzung für quadratische Polynome lautet

$$|F(\bar{x}) - p_2(\bar{x})| \leq \frac{1}{3!} \max_{z\in[x_0,x_2]} |F'''(z)| \cdot |(\bar{x}-x_0)(\bar{x}-x_1)(\bar{x}-x_2)|.$$

Die 3. Ableitung ist auf $[0, 1.4]$ monoton fallend und negativ. Also liegt das gesuchte Betrags-Maximum der Ableitung am rechten Rand.

Daraus ergibt sich:

$$|F(1.1) - p_2(1.1)| \leq \frac{1}{6} \cdot (-F^{(3)}(1.2)) \cdot 0.3 \cdot 0.1^2 = 0.00380798 \approx 3.8 \cdot 10^{-3}$$

bzw.

$$|F(1.1) - p_2(1.1)| \leq \frac{1}{6} \cdot (-F^{(3)}(1.4)) \cdot 0.3 \cdot 0.1^2 = 0.0173077 \approx 17.3 \cdot 10^{-3}$$

(2)

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung für das Integral

$$I(f) = \int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\;,$$

die um höchstens $\epsilon = 0.04$ von der exakten Lösung abweicht.

a) Wie viele Schritte sind dafür mit der summierten Trapezregel notwendig?

b) Geben Sie den Näherungswert des Integrals für die in a) berechnete Schrittzahl an.

c) Wie viele Schritte wären mit der summierten Gaußformel notwendig, die pro Intervall die gleiche Stützstellenzahl wie die Trapezregel hat?

Hinweis: Für $x \in [0,1]$ gilt $|f^{(1)}(x)| \leq 1.29$, $|f^{(2)}(x)| \leq 2.3$, $|f^{(3)}(x)| \leq 14.5$, $|f^{(4)}(x)| \leq 28.5$, $|f^{(5)}(x)| \leq 53.6$

a) Für den Fehler der summierten Trapezregel gilt $\Big($Wir verwenden gem. Hinweis $f^{(2)}_{max} := 2.3 \geq \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)|\Big)$:

$$|I_1^n(f) - I(f)| \leq n\frac{h^3}{12}\max_{x\in[a,b]}|f^{(2)}(x)| = \frac{1}{n^2}\frac{(b-a)^3}{12}\max_{x\in[a,b]}|f^{(2)}(x)| \leq \frac{1}{n^2}\frac{(b-a)^3}{12} f^{(2)}_{max} \overset{!}{\leq} \epsilon$$

Somit ergibt sich für n :

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3\, f^{(2)}_{max}}{12\epsilon}} = \sqrt{\frac{f^{(2)}_{max}}{12\cdot 0.04}} = \sqrt{\frac{2.3}{0.48}} \approx \sqrt{4.7917} = 2.1890.$$

Also $n = 3$. **(2)**

b) Mit n=3 ergibt sich für die summierte Trapezregel

$$\begin{aligned} I_1^3(f) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(f(0) + 2f\left(\frac{1}{3}\right) + 2f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1)\right) \\ &\approx \frac{1}{6}(0 + 2\cdot 0.11088 + 2\cdot 0.42996 + 0.84147) \\ &= 0.32052 \end{aligned}$$

(1)

c) Für die summierte Gaußformel wird aus der Fehlerdarstellung (Formelsammlung)

$$|Q_m(f) - I(f)| = \frac{((m+1)!)^4}{((2m+2)!)^3(2m+3)} h^{2m+3}|f^{(2m+2)}(\xi)|$$

mit $m = 1$ ($\hat{=}$ zwei Stützstellen) und $\Big($Wir verwenden gem. Hinweis $f^{(4)}_{max} := 28.4 \geq \max_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)|\Big)$:

$$\begin{aligned} |Q_1^{\mathbf{n}}(f) - I(f)| &\leq \mathbf{n}\frac{((1+1)!)^4}{((2\cdot 1+2)!)^3(2\cdot 1+3)} h^{2\cdot 1+3} f^{(4)}_{max} \\ &= n\frac{2^4}{24^3\cdot 5} h^5 f^{(4)}_{max} \\ &= \frac{1}{n^4}\frac{(b-a)^5}{4320} f^{(4)}_{max} \overset{!}{\leq} \epsilon \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für n:

$$\begin{aligned} n &\geq \sqrt[4]{\frac{1}{4320\epsilon} f^{(4)}_{max}} = \sqrt[4]{\frac{28.5}{4320\cdot 0.04}} \\ &\approx 0.63727 \end{aligned}$$

Also n=1; d.h.: Bereits die unsummierte Formel liefert die geforderte Genauigkeit. **(2)**