Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Dezimalzahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an.

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung, und es sei $\ominus$ (gem. Vorlesung/Buch) der Minusoperator für $\mathbb{M}$, d.h.: $x \ominus y := fl(fl(x) - fl(y))$ wobei wir hier annehmen, dass alle Zwischenergebnisse in $\mathbb{D}$ liegen. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \le \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x + \epsilon$.	falsch
2.	Es existiert ein $x \in \mathbb{D}$, so dass $\frac{\lvert\text{fl}(x)-x\rvert}{\lvert x\rvert} = \text{eps}$.	falsch
3.	Die Zahl 31 ist in $\mathbb{M}(2,6,-8,8)$ exakt darstellbar.	wahr
4.	Es gilt $\frac{\lvert(x\ominus y)-(x-y)\rvert}{\lvert x-y\rvert} \le \text{eps}$ für alle $x,y \in \mathbb{M}(b,m,r,R)$ mit $x \ne y$.	wahr
5.	Berechnen Sie x_{MAX} für $\mathbb{M}(3,2,-1,3)$.	**24**
6.	Es gilt $\frac{\lvert(x\ominus y)-(x-y)\rvert}{\lvert x-y\rvert} \le \text{eps}$ für alle $x,y \in \mathbb{D}$ mit $x \ne y$.	falsch
7.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler.	falsch
8.	Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.	falsch
9.	Die Funktion $f(x_1,x_2) = x_2 e^{x_1}$ ist für alle (x_1,x_2) mit $\lvert x_1\rvert \le 1$ gut konditioniert.	wahr
10.	Es sei $f(x) = \frac{1}{1+x}$ und $\tilde{x}$ ein Näherungswert für $x = 3$, der mit einem relativen Fehler von maximal 2% behaftet ist. Bestimmen Sie in erster Näherung eine (scharfe) Schranke für den relativen Fehler in $f(\tilde{x})$ als Annäherung für $f(x)$.	**0.015**

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.

1.	Es sei $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung x und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Es gilt $\lVert r\rVert \le \kappa(A)\lVert\tilde{x} - x\rVert$, mit $\kappa(A) := \lVert A\rVert\lVert A^{-1}\rVert$.	falsch
2.	Es existiert stets eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$ gilt.	falsch
3.	Falls A orthogonal ist, gilt $A^T A = I$.	wahr
4.	Es sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär und $\kappa(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. $\lVert\cdot\rVert$. Es gilt $\kappa(A\,B) \le \kappa(A)\kappa(B)$.	wahr
5.	Es sei $B := DA$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Geben Sie $\lVert B\rVert_\infty$ an.	**1**
6.	Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ existiert eine Cholesky Zerlegung.	falsch
7.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung x über die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung beträgt etwa $\frac{1}{6}n^3$ Operationen (gem. Vorlesung/Buch).	falsch
8.	Pivotisierung verbessert die Kondition der Gauß-Elimination.	falsch
9.	Es sei $P\,A = L\,R$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt: $\lvert\det(A^{-1})\rvert = \frac{1}{\lvert\det(R)\rvert}$.	wahr
10.	Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\lVert A\rVert_1$.	**8**

VF-3: Es seien A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung von A.

1.	Es gilt $\|A\|_2 = \|D\|_2$.	falsch
2.	Das Problem $Ax = b$ ist immer gut konditioniert.	falsch
3.	Das Cholesky-Vefahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist ein stabiles Verfahren.	wahr
4.	Für die stabile Berechnung einer $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A ist Pivotisierung notwendig.	falsch
5.	Es sei Q eine orthogonale Matrix und $Q\begin{pmatrix}5\\0\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\c\\0\end{pmatrix}$. Geben Sie $\|c\|$ an.	**13**
6.	Es gilt $A^{-1} = LD^{-1}L^T$.	falsch
7.	Das Produkt zweier Givens-Rotations-Matrizen ist eine orthogonale Matrix.	wahr
8.	Es seien $Q_v \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine Householder-Transformations-Matrix und $x \in \mathbb{R}^m$ beliebig. Es gilt $\|Q_v x\|_\infty = \|x\|_\infty$.	falsch
9.	Die Berechnung einer QR-Zerlegung $B = Q\,R$ von $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ über Householder-Transformationen ist nur dann stabil, wenn die Matrix B vollen Spaltenrang hat.	falsch
10.	Es sei Q_v eine Householder-Transformation. Geben Sie den Wert des größten Eigenwertes der Matrix Q_v an.	**1**

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R = \begin{pmatrix}\tilde{R}\\0\end{pmatrix}$ gilt, mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$. Weiter sei $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b.

1.	Je kleiner der Winkel Θ, desto kleiner ist die Größe $\frac{\|A\,x^* - b\|_2}{\|b\|_2}$.	wahr
2.	Es gilt $\tilde{R}\,x^* = Q^T\,b$.	falsch
3.	Die Matrix $\tilde{R}$ kann man über Givens-Rotationen bestimmen.	wahr
4.	Es gilt $\det(\tilde{R}) = \det(A)$.	falsch
5.	Es seien $m = 4$, $n = 3$ und $Q\,b = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\-4\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|A\,x^* - b\|_2$.	**4**
6.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$.	wahr
7.	Durch eine geeignete Wahl des skalaren Parameters im Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems wird die Konvergenzordnung der Methode in der Regel erhöht.	falsch
8.	Die Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems kann man als Fixpunktiteration darstellen.	wahr
9.	Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist immer maximal 1.	falsch
10.	Es sei $\Theta = 0$. Bestimmen Sie $\|A\,x^* - b\|_2$.	**0**

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x. Für $n = 1$ sei außerdem $\Phi_1(x) := \frac{1}{4}x^2 - 1$.		
1.	Es gilt $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.	falsch
2.	Die Konvergenzordung der Fixpunktiteration ist maximal 2.	falsch
3.	Das Fixpunktproblem $\Phi_1(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung x^* in $\mathbb{R}$.	falsch
4.	Für Φ_1 sind auf dem Intervall $[-1, 0]$ alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.	wahr
5.	Wir betrachten die Fixpunktiteration zur Bestimmung einer Lösung $x^* < 0$ des Fixpunktproblems $\Phi_1(x) = x$, mit einem Startwert x_0 aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^*. Geben Sie die Konvergenzordnung dieser Methode an.	**1**
6.	Bei der Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren Funktion f, müssen die Startwerte x_0, x_1 so gewählt werden dass $f(x_0)f(x_1) < 0$ gilt.	falsch
7.	Es sei $f(x) = x^2 - 3$. Das auf f angewandte Newton Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $x^* > 0$ dieser Funktion.	wahr
8.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton Vefahren zur Bestimmung einer Nullstelle kann man nur bei skalarwertigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ anwenden.	falsch
9.	Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Weiter sei x_0 so gewählt, dass die Newton Methode $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ mit Startwert x_0 gegen x^* konvergiert. Dann gilt: $\|x^* - x_k\| \approx (x_{k+1} - x_k)^2$ für k hinreichend groß.	falsch
10.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$. Wir betrachten das Fixpunktproblem auf dem Intervall $[0, 1]$. Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Lipschitzkonstante $L < 1$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz an.	**0.5**

VF-6: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Weiter sei $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = (x - x_n)[x_0, \ldots, x_n]f + P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	falsch
2.	Es sei Π_n der Raum aller reellen Polynome vom Grad maximal n. Die Knotenpolynome $\omega_0(x) := 1$, $\omega_k(x) := (x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, bilden eine Basis des Raumes Π_n.	wahr
3.	Die Auswertung des Interpolationspolynoms in der monomialen Basis $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ist für numerische Zwecke ungünstig, weil das Problem (Auswertung) bezüglich der Koeffizienten a_k oft schlecht konditioniert ist.	wahr
4.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \|P(f \mid x_0, \ldots, x_n) - f(x)\|$ hängt von der Wahl der Stützstellen ab.	wahr
5.	Es sei $f(x) = 3x^2 + 2$. Bestimmen Sie $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$.	**0**
Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ mit $a \le x_0 < \ldots < x_m \le b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.		
6.	Es sei $I_2(f)$ die Simpsonregel. Dann gilt $\|I_2^n(f) - I(f)\| \to 0$ für $n \to \infty$.	wahr
7.	Es gilt $I_m(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad maximal m.	wahr
8.	Es gilt $I_1^n(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad maximal n.	falsch
9.	Bei den Newton-Cotes-Formeln hängen die Gewichte w_j von dem Interval $[a, b]$ ab.	falsch
10.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^2 x^5\,dx$ mit Hilfe der summierten Trapezregel $I_1^2(f)$.	**17**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei $\alpha \in (0, 0.9]$ eine Konstante, sowie

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -3\alpha & 1-\alpha & 3\alpha+2 \\ 3 & 3 & \alpha-1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3-4\alpha \\ 8+\alpha \end{pmatrix}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A in Abhängigkeit von α (ohne Pivotisierung). Geben Sie L und R explizit an.

b) Geben Sie eine scharfe, obere Schranke für $\|A\|_\infty$ unabhängig von $\alpha \in (0, 0.9]$ an. Ist das Gleichungssystem $Ax = b$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar? Geben Sie alle $\alpha \in (0, 0.9]$ an, für welche das der Fall ist.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen, wobei angenommen wird, dass A nicht singulär sei.

a) $L\,R$-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -3\alpha & 1-\alpha & 3\alpha+2 \\ 3 & 3 & \alpha-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -\alpha & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \alpha+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -\alpha & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \alpha-2 \end{pmatrix}$$

also

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix}.$$

(2)

b) Es gilt

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max\{7,\ |-3\alpha| + |1-\alpha| + |3\alpha+2|,\ 6 + |\alpha-1|\} \\ &\leq \max\left\{7,\ \sup_{\alpha\in(0,0.9]} \{|-3\alpha| + |1-a| + |3\alpha+2|\},\ \sup_{\alpha\in(0,0.9]} \{6 + |\alpha-1|\}\right\} \\ &= \max\left\{7,\ \sup_{\alpha\in(0,0.9]} \{5\alpha+3\},\ \sup_{\alpha\in(0,0.9]} \{7-\alpha\}\right\} \\ &= \max\{7,\ 4.5+3,\ 7\} = 7.5 \end{aligned}$$

Es ist

$$\det(A) = \det(LR) = \det(L)\det(R) = 1\cdot 3\cdot 1\cdot(\alpha-2) = 3\cdot(\alpha-2).$$

Nur für $\alpha = 2$ ergibt sich $\det(A) = 0$, und damit hat das Gleichungssystem für alle $\alpha \in (0, 0.9]$ eine eindeutige Lösung.

(2)

c) Es gilt

$$A\,x = b \Leftrightarrow L\,R\,x = b$$

Substituiere $Rx = y$ und löse $Ly = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3-4\alpha \\ \alpha+8 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \alpha-2 \end{pmatrix}.$$

Mache im Anschluss die Substitution rückgängig:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ \alpha-2 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sollen so gewählt werden, dass die Messwerte

x_i	-1	0	1
f_i	5	9	-5

im Sinne kleinster Fehlerquadrate durch die Modellfunktion

$$f(x) = \alpha \left(\frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right) + \beta \left(-8x^2 - 3x + 12 \right)$$

optimal approximiert werden.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem auf.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit dem Householder-Verfahren und geben Sie die Norm des Residuums an.
Hinweis: Givensrotationen oder der Ansatz über Normalengleichungen werden mit 0 Punkten bewertet.

a) Definiere zunächst

$$f(x) = \alpha \underbrace{\left(\frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right)}_{:=f_\alpha(x)} + \beta \underbrace{\left(-8x^2 - 3x + 12 \right)}_{:=f_\beta(x)}.$$

Dann lautet das zugehörige lineare Ausgleichsproblem:
Finde $x^* \in \mathbb{R}^2$, so dass $\|Ax^* - b\|_2$ minimal ausfällt mit

$$A = \begin{pmatrix} f_\alpha(-1) & f_\beta(-1) \\ f_\alpha(0) & f_\beta(0) \\ f_\alpha(1) & f_\beta(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 12 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(1)

b) Löse das lineare Ausgleichsproblem mit Householder:
Householder-Tableau:

			3	7	5	
			0	12	9	
			4	1	-5	$\alpha_1 = 5$
8	0	4	(40)	60	20	$\beta_1 = 1/40$
		1/5	-5	-5	1	
		0	0	12	9	
		1/10	0	-5	-7	$\alpha_2 = 13$
	25	-5		(325)	260	$\beta_2 = 1/325 = 0.0030769$
			-5	-5	1	$-68/65 = -1.0462$
1/13	=	0.076923	0	-13	-11	$11/13 = 0.84615$
1/65	=	-0.015385	0	0	-3	$res = 3$

Rückwärtseinsetzen (eigentlich schon im Tableau)

$$\Rightarrow \beta = x_2 = \frac{11}{13} \approx 0.84615,$$
$$\Rightarrow \alpha = x_1 = -\frac{1}{5}(1 + 5x_2) = -\frac{68}{65} \approx -1.0462$$

Das Residuum ist $r := \|Ax - b\|_2 = 3$.

(5)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{y^2}{4} - y &= 9 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

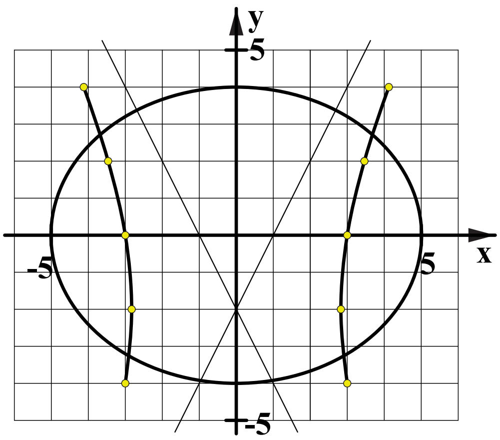
a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).

b) Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 3. Quadranten für beide Verfahren

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.

Teil a)



Skizze: Hyperbel $x^2 - (y+2)^2/4 = 8$ und Ellipse in Normallage mit Hauptachsen 4 und 5 oder Wertetabelle mit z.B.: $y = -2 \leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \approx \pm 2.83$, $y = -4$ oder $0 \leftrightarrow x = \pm 3$, $y = 2 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3.46$ und $y = 4 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{17} \approx \pm 4.12$). Zu skizzieren ist der gesamte Bereich:

Startwerte:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(2)

Teil b)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - \frac{y^2}{4} - y - 9 \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - 1 \end{pmatrix} \rightarrow f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -\frac{y}{2} - 1 \\ \frac{2x}{25} & \frac{y}{8} \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren:

$$x_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -8 & 0 & -8 \\ -0.32 & -0.25 & 0.11 \end{array}\right) \rightarrow \Delta x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.72 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3.72 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3.72 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 0.86 & -0.2604 \\ -0.24 & -0.465 & -0.2249 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 0.86 & -0.2604 \\ 0 & -0.4994 & -0.214484 \end{array}\right) \rightarrow \Delta x_1 = \begin{pmatrix} 0.1049593 \\ 0.4294834 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} -2.8950407 \\ -3.2905166 \end{pmatrix}$$

(4)

Vereinfachtes Newton-Verfahren (erster Schritt wie Newton-Verfahren):

$$x_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3.72 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -8 & 0 & -0.2604 \\ -0.32 & -0.25 & -0.2249 \end{array}\right) \rightarrow \Delta x_1 = \begin{pmatrix} 0.03255 \\ 0.857936 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} -2.96745 \\ -2.862064 \end{pmatrix}$$

(2)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle einer Funktion y

x_i	-1	0	1	2	4	8
y_i	-0.74682	0	0.74682	0.88208	0.88623	0.88623

a) Mit der Hilfe eines Polynoms zweiten Grades ($p_2(x)$) berechne man einen möglichst guten Näherungswert für $y(1.5)$ mit dem Neville-Aitken-Schema. Geben Sie $p_2(1.5)$ explizit an.

b) Sei nun $y(x) := \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Geben Sie eine möglichst scharfe Fehlerabschätzung für den in Teil a) bestimmten Wert $p_2(1.5)$ an, ohne jedoch $y(1.5)$ zu berechnen!

a) Wir wollen eine möglichst gute, d.h. kleine Fehlerabschätzung erreichen. Die beeinflussbaren Größen im Fehlerschätzer sind das Knotenpolynom und die dritte Ableitung der Funktion, die die Basis für die Wertetabelle darstellt. Mit den vorliegenden Informationen können wir nur den Knotenpolynom-Anteil minimieren und das erreichen wir, wenn wir die drei Stützstellen wählen, die am dichtesten an $x = 1.5$ dran liegen. In diesem Fall sind das $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

Neville–Aitken Tableau:

$$
\begin{array}{r|lllll}
x_0 = 0 & 0 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_1 = 1 & 0.74682 & \rightarrow & 1.1202 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
x_2 = 2 & 0.88208 & \rightarrow & 0.81445 & \rightarrow & 0.89089
\end{array}
$$

Es ist also $y(1.5) \approx p_2(1.5) = 0.89089$.

(2)

b) Die passende Fehlerabschätzung lautet hier:

$$|y(1.5) - p_2(1.5)| \leq |\omega(1.5)| \frac{1}{3!} \max_{x\in[0,2]} |y'''(x)|$$

Da eine möglichst scharfe Abschätzung gegeben werden soll, muss eine Extremwertuntersuchung für y''' durchgeführt werden. Es ist

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= e^{-x^2} \\
y''(x) &= -2x\, e^{-x^2} \\
y'''(x) &= (4x^2 - 2)\, e^{-x^2} \\
y^{(4)}(x) &= (8x - 8x^3 + 4x)\, e^{-x^2} = 4x(3 - 2x^2)\, e^{-x^2}
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen von $y^{(4)}$, und damit möglichen Extremalstellen von y''', liegen offensichtlich bei

$$x_0 = 0, x_{1,2} = \pm\sqrt{1.5}$$

Randwerte (0 und 2) und gegebene Nullstellen von $y^{(4)}$ einsetzen (Nullstelle $x_2 = -\sqrt{1.5}$ liegt nicht im betrachteten Intervall!):

$$y'''(0) = -2, \qquad y'''(2) = 14\, e^{-4} = 0.25642, \qquad y'''(\sqrt{1.5}) = 0.89252.$$

Da y''' stetig differenzierbar ist, gilt somit $\max_{x\in[0,2]} |y'''(x)| = 2$, und man erhält die Fehlerabschätzung

$$\left|p_3(1.5) - y(1.5)\right| \leq \left|(1.5 - 0)(1.5 - 1)(1.5 - 2)\right| \frac{1}{3!} \max_{x\in[0,2]} |y'''(x)| = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{8} = 0.125$$

(3)

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gesucht ist eine Näherung für das Integral

$$I(f) = \int_{-1.2}^{1.2} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-1.2}^{1.2} \ln(\cos(x))\ \mathrm{d}x.$$

Zur numerischen Approximation wollen wir die 2-Punkt Gauß-Formel verwenden, welche für das Interval [-1,1] durch

$$\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x \approx 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\, g\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2}\, g\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\right)$$

gegeben ist.

a) Wieviele Schritte sind mit der summierten 2-Punkte Gauß-Formel notwendig, um einen Fehler von höchstens 10^{-3} zu erhalten?

b) Berechnen Sie den Näherungswert für $I(f)$ mittels der summierten 2-Punkt Gauß-Formel für $n = 1$ Teilintervalle.

Hinweis: $f'(x) = -\tan x,\quad f''(x) = -\left(1+\tan^2 x\right),\quad f^{(3)}(x) = -2\tan x\left(1+\tan^2 x\right),$
$f^{(4)}(x) = -2\left(1+\tan^2 x\right)\left(1+3\tan^2 x\right),\quad f^{(5)}(x) = -8\left(1+\tan^2 x\right)\left(2\tan x + 3\tan^3 x\right).$

Lösung:

a) Fehlerformel:

$$|Q_m^n(f) - I(f)| \le n\frac{((m+1)!)^4}{((2m+2)!)^3(2m+3)} h^{2m+3} \max_{\xi\in[a,b]} |f^{(2m+2)}(\xi)|$$

Für $m = 1$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} |Q_m^n(f) - I(f)| &\le n\frac{(2!)^4}{(4!)^3\cdot 5} h^5 \max_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)| \\ &= n\cdot\frac{1}{4320}\left(\frac{b-a}{n}\right)^5 \max_{\xi\in[a,b]} |f^{(4)}(\xi)| \end{aligned}$$

Da $\tan^2$ symmetrisch ist, ist auch $f^{(4)}$ symmetrisch und zudem auf $[0, 1.2]$ monoton fallend und negativ. Mit $b - a = 2.4$ erhalten wir somit

$$|Q_m^n(f) - I(f)| \le n^{-4}\cdot\frac{(2.4)^5}{4320}\cdot|f^{(4)}(1.2)| = 5.8531\cdot n^{-4}$$

Für n gilt die Bedingung

$$n^{-4}\cdot 5.8531 \le 10^{-3}$$

also $(n > 0)$

$$n \ge \sqrt[4]{5.8531\cdot 10^3} \approx 8.75$$

Somit werden $n = 9$ Schritte benötigt, um die gewünschte Genauigkeit zu erhalten.

(3)

b) Für $n = 1$ erhalten wir durch Transformation (hier nur eine Skalierung)

$$\begin{aligned} \int_{-1.2}^{1.2} f(x)\mathrm{d}x &\approx 2.4\cdot\left(\frac{1}{2}f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot 1.2\right) + \frac{1}{2}f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot 1.2\right)\right) \\ &= 1.2\cdot(f(-0.69282) + f(0.69282)) \\ &= 2.4\cdot f(0.69282) \\ &= -0.62900 \end{aligned}$$

(2)