Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. Falls nicht anders gefordert, muss das Ergebnis als Dezimalzahl angegeben werden.

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps $:= \frac{b^{1-m}}{2}$ die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung.

1.	In $\mathbb{M}(10,4,-8,8)$ gilt eps $= 5 \cdot 10^{-5}$.	falsch
2.	In $\mathbb{M}(2,4,-4,4)$ gilt $x_{\text{MIN}} = \frac{1}{32}$.	wahr
3.	Die Anzahl der Maschinenzahlen in $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ hängt nicht von m ab.	falsch
4.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \le$ eps und $\text{fl}(x) = x(1+\epsilon)$.	wahr
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 15 in $\mathbb{M}(3,8,-8,8)$ an.	**120**
6.	Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, gibt es keine stabile Algorithmen zur Lösung dieses Problems.	falsch
7.	Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.	falsch
8.	Es seien $x = 2$ und $y = -2 + 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $e^x - e^y$ tritt Auslöschung auf.	falsch
9.	Die Funktion $f(x) = x^2 \ln(x)$ ist schlecht konditioniert für alle x mit $\lvert x-1\rvert \ll 1$.	wahr
10.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^3$ im Punkt $(2,0)$.	**2**

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.

1.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\kappa_\infty(B) = 1$.	falsch
2.	Es sei $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Es gilt $\\|\tilde{x} - x\\| \le \\|A^{-1}\\|\\|\tilde{b} - b\\|$.	wahr
3.	Für die Konditionszahl der Matrix A gilt $\kappa(A^2) \le \kappa(A)^2$.	wahr
4.	Es existiert immer eine LR-Zerlegung $A = L\,R$ von A.	falsch
5.	Berechnen Sie $\\|A\\|_1$ für $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.	**10**
6.	Falls A symmetrisch positiv definit ist, existiert immer eine $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A.	wahr
7.	Es sei $P\,A = L\,R$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt: $\det(A) = \det(R)$.	falsch
8.	Es sei $P\,A = L\,R$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Für die Lösung x gilt $x = R^{-1}L^{-1}Pb$.	wahr
9.	Es existiert immer eine QR-Zerlegung $A = QR$ von A.	wahr
10.	Es sei $A = Q\,R$ eine $Q\,R$-Zerlegung von A mit $R = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\kappa_2(A)$.	**2**

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix.		
1.	Die Matrix A sei symmetrisch positiv definit und $A = L\,D\,L^T$ sei die Cholesky-Zerlegung von A. Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(D)$.	falsch
2.	Die Matrix A sei symmetrisch positiv definit. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung von A über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen.	wahr
3.	Die Matrix A sei symmetrisch positiv definit. Für die stabile Berechnung einer $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ ist Pivotisierung notwendig.	falsch
4.	Es sei $A = Q\,R$ eine $Q\,R$-Zerlegung von A. Dann gilt $\det(A) = \det(R)$.	falsch
5.	Es seien $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Bestimmen Sie $\det(Q_v)$.	**-1**
6.	Die Householder-Methode zur Bestimmung der $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ ist auch dann stabil, wenn $\kappa_2(A) \gg 1$ gilt.	wahr
7.	Das Produkt zweier orthogonaler $n \times n$- Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.	wahr
8.	Das Produkt zweier symmetrisch positiv definiter Matrizen ist wieder symmetrisch positiv definit.	falsch
9.	Es seien $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Es gilt $\kappa_\infty(Q_v) = 1$, wobei $\kappa_\infty(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der Maximumnorm ist.	falsch
10.	Es seien Q eine orthogonale Matrix und $Q\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}$. Geben Sie $\lvert b\rvert$ an.	**6**

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n \leq m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter bezeichne $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = R = \begin{pmatrix}\tilde{R}\\ \emptyset\end{pmatrix}$ gilt. Wir definieren $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} := Qb$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \lVert A\,x - b\rVert_2$.		
1.	Es gilt $\lVert Ax - b\rVert_2^2 = \lVert\tilde{R}x - b_1\rVert_2^2 + \lVert b_2\rVert_2^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	wahr
2.	Es gilt $R\,x^* = b_1$.	falsch
3.	Die Berechnung der Zerlegung $QA = R$ über Householder-Transformationen ist nur dann durchführbar, wenn die Matrix A den vollen Spaltenrang n hat.	falsch
4.	Die Matrix R kann man über Givens-Rotationen bestimmen.	wahr
5.	Es seien $m = 4$, $n = 2$ und $Q\,b = (2, 1, 3, -4)^T$. Bestimmen Sie $\lVert Ax^* - b\rVert_2$.	**5**
6.	Es gilt $\det(\tilde{R}) \neq 0$.	wahr
7.	Die Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist in einer hinreichend kleinen Umgebung der Lösung immer konvergent.	falsch
8.	Eine geeignete Wahl des skalaren Parameters μ im Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung eines nichtlinearen Ausgelichsproblems kann den Einzugsbereich der Methode erweitern.	wahr
9.	Die Konvergenzordnung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens ist in der Regel größer als die der Gauß-Newton-Methode.	falsch
10.	Es sei $b \neq 0$. Bestimmen Sie $\frac{\lVert A^TAx^*\rVert_2}{\lVert A^Tb\rVert_2}$.	**1**

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung (Jacobi-Matrix) von Φ an der Stelle x.

1.	Falls die Fixpunktiteration konvergiert, so gilt $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.	falsch
2.	Falls die Fixpunktiteration konvergiert, ist die Konvergenzordnung immer 1.	falsch
3.	Das Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist eine Fixpunktiteration.	wahr
4.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\|x_0 - x^*\|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.	wahr
5.	Sei $\Phi : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) := x^2 + x - \frac{1}{x}$. Bestimmen Sie $\|\Phi'(x^*)\|$.	**4**
6.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0, 1]$ erfüllt.	falsch
7.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 1]$ erfüllt.	wahr
8.	Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei $x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1} f(x_k)$, mit $\det(f'(x_k)) \neq 0$, eine Iteration des Newton-Verfahrens zur Bestimmung der Lösung x^* von $f(x) = 0$. Es gilt: x_{k+1} ist die Nullstelle der linearen Taylor-Annäherung von f an der Stelle x^*.	falsch
9.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren dient dazu, die Konvergenzordnung der Methode zu erhöhen.	falsch
10.	Es sei $0 < \|\Phi'(x^*)\| < 1$. Geben Sie die Konvergenzordnung an, mit der die Fixpunktiteration lokal konvergiert.	**1**

VF-6: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Wir bezeichnen mit $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Es gilt: $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x) + [x_0, \ldots, x_n]f\, \Pi_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	wahr
2.	Der Fehler $\max_{x \in [a,b]} \|P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\|$ ist minimal wenn man die Stützstellen x_i äquidistant wählt.	falsch
3.	Es sei $f(x) = x^3 + x^4$. Dann gilt: $f = P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ für alle $n \geq 3$.	falsch
4.	Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $P(f \mid x_0, x_1, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0)(x)$.	wahr
5.	Es sei $f(x) = 2x^3$. Bestimmen Sie $[x_0, \ldots, x_3]f$.	**2**

Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ soll numerisch approximiert werden.
Wir betrachten die Quadraturformel $I_m(f) = (b - a) \sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$, wobei $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$, wird mit $I_m^n(f)$ bezeichnet.

6.	Falls $f \in C^\infty[a, b]$ ist, so gilt für die Newton-Cotes Formeln $\|I_m(f) - I(f)\| \to 0$ für $m \to \infty$.	falsch
7.	Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_m)$ das Lagrange–Interpolationspolynom mit äquidistanten Stützstellen $x_j,\ 0 \leq j \leq m$. Bei der Gauss-Quadratur gilt $I_m(f) = \int_a^b P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)\, dx$.	falsch
8.	Bei der Gauss-Quadratur gilt $w_j \geq 0$ für $0 \leq j \leq m$.	wahr
9.	Es seien $f \in C^3[a, b]$ und $I_0(f)$ die Mittelpunktsregel. Dann gilt $\|I_0^n(f) - I(f)\| \leq c \cdot h^3$, wobei die Konstante c nicht von n abhängt.	falsch
10.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^2 x^3\, dx$ mit Hilfe der Simpsonregel $I_2(x^3)$.	**4**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3/5 & -1/2 & 1/5 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2/5+\alpha \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A mit Pivotisierung. Geben Sie L, R und P explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ly = Pb$.

c) Für welche α hat das Gleichungssystem $Rx = y$ bzw. $Ax = b$

   i) genau eine Lösung?

   ii) mehr als eine Lösung?

   iii) keine Lösung?

d) Berechnen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$ unter Verwendung der in a) gefundenen LR-Zerlegung für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die es mindestens eine Lösung gibt.

a) LR-Zerlegung mit Pivotisierung:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3/5 & -1/2 & 1/5 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Gauss}]{} \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 1 \\ \hline 1/5 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Pivot }(2,3)]{} \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Gauss}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \\ \hline 1/5 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$

Also gilt $P\,A = L\,R$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/5 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bem.: In der Praxis wird nicht die Matrix P sondern der Pivotvektor gespeichert.

(2)

b) Wir haben

$$L\,y = P\,b \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1/5 & -1/2 & 1 & -2/5+\alpha \end{array}\right) \downarrow \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

(1)

c) Wir haben

$$R\,x = y \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad 0 \cdot x_3 = \alpha\,.$$

Da die Matrix A singulär ist, erhält man daraus:

   i) Es gibt nie genau eine Lösung.

   ii) Falls $\alpha = 0$ gilt, ist x_3 beliebig, d.h. es gibt unendlich viele Lösungen.

   iii) Im Fall $\alpha \neq 0$ gibt es keine Lösung.

(2)

d) Für $\alpha = 0$ haben wir

$$R\,x = y \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \uparrow \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2-\beta}{3} \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

(1)

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Einem technischen Vorgang liegt die theoretisch begründete Modellfunktion

$$f(x) = \alpha(-1122\,x^2 + 1275\,x - 153) + \beta(130\,x^2 - 195\,x + 5)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und die Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ zugrunde.

Ihnen stehen die Messwerte

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	-15	10	61

zur Verfügung. Die Parameter α und β sollen im Sinne kleinster Fehlerquadrate optimal bestimmt werden.

a) Formulieren Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem. Geben Sie alle zugehörigen Matritzen und Vektoren explizit an. Gibt es für das lineare Ausgleichsproblem eine eindeutige Lösung? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem mit Hilfe von Givens-Rotationen, ohne die Normalgleichungen aufzustellen. Wie groß ist das Residuum?

a) Das lineare Ausgleichsproblem lautet: Finde $y^* = (\alpha^*, \beta^*)^T \in \mathbb{R}^2$ so, dass $||A\,y^* - b||_2 = \min_{y\in\mathbb{R}^2} ||A\,y - b||_2$ ist. Setze

$$f_1(x) := -1122x^2 + 1275x - 153 \quad \text{und} \quad f_2(x) := 130x^2 - 195x + 5,$$

dann ist

$$A = \begin{pmatrix} f_1(0) & f_2(0) \\ f_1(1/2) & f_2(1/2) \\ f_1(1) & f_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -153 & 5 \\ 204 & -60 \\ 0 & -60 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \\ 61 \end{pmatrix}.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt (Satz 4.5): Das lineare Ausgleichsproblem hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Matrix A vollen Rang besitzt. Da $A_{31} = 0$ und $A_{32} \neq 0$ sind die beiden Spalten von A offensichtlich linear unabhängig. Somit hat A vollen Rang. Also hat das Problem eine eindeutige Lösung.

(2)

b) Löse das lineare Ausgleichsproblem mit Givens-Rotationen:

Eliminiere A_{21}: $r_1 = \sqrt{(-153)^2 + 204^2} = 255 \Rightarrow c_1 = \frac{-153}{255} = -\frac{3}{5}$, $s_1 = \frac{204}{255} = \frac{4}{5}$ und somit

$$(A|b) \to (A|b)^{(1)} = \begin{pmatrix} 255 & -51 & | & 17 \\ 0 & 32 & | & 6 \\ 0 & -60 & | & 61 \end{pmatrix},$$

Eliminiere $A_{32}^{(1)}$: $r_2 = \sqrt{32^2 + (-60)^2} = 68 \Rightarrow c_2 = \frac{32}{68} = \frac{8}{17}$, $s_2 = \frac{-60}{68} = -\frac{15}{17}$ und somit

$$(A|b)^{(1)} \to (A|b)^{(2)} = \begin{pmatrix} 255 & -51 & | & 17 \\ 0 & 68 & | & -51 \\ 0 & 0 & | & 34 \end{pmatrix},$$

Löse das lineare Ausgleichsproblem durch Rückwärtseinsetzen (wir unterdrücken im Folgenden den *) :

$$\beta = y_2 = \frac{-51}{68} = -\frac{3}{4}, \quad \alpha = y_1 = \frac{1}{255}\left(17 + \frac{3}{4}(-51)\right) = -\frac{1}{12}.$$

Damit lautet die Lösung $y = \left(-\frac{1}{12}, -\frac{3}{4}\right)^T = (-0.083333, -0.75)^T$. Das Residuum lässt sich aus $b^{(2)}$ ablesen und beträgt $||A\,y - b||_2 = 34$.

(3)

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(y-1)+\frac{1}{4} \\ \cos(x+1)\sin\left(\frac{y}{2}\right)-\frac{1}{2} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y)\ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [-1,1]\times[-1,1]$ erfüllt sind. Verwenden Sie die $\|\cdot\|_1$-Norm.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0,y_0) := (0,\ 0)$ zwei Fixpunktschritte durch, d. h. berechnen Sie (x_2,y_2).

c) Geben Sie eine a-priori- und eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für (x_2,y_2) unter Verwendung der $\|\cdot\|_1$-Norm an.

d) Wie viele Iterationsschritte/Fixpunktschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0,y_0) := (0,\ 0)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\|\cdot\|_1$-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 10^{-5}$ anzunähern?

zu a)

i) E ist abgeschlossen und beschränkt, also vollständig.

ii) **Selbstabbildung:** Wegen $(x,y)\in[-1,1]^2$ gilt $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, $\sin\left(\frac{y}{2}\right)\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ und generell $\cos(y-1)\in[-1,1]$ sowie $\cos(x+1)\in[-1,1]$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4} \le F_1(x,y) \le \frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ -1 = -1\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \le F_2(x,y) \le 1\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also $F(E)\subset[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}]\times[-1,0]\subset E \Rightarrow F$ ist selbstabbildend auf $\subset E$.

iii) **Kontraktivität:** Da E konvex ist und F stetig differenzierbar ist, dürfen wir zum Nachweis der Kontraktion die Ableitung benutzen. Als Jacobi-Matrix ergibt sich

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(y-1) & -\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(y-1) \\ -\sin(x+1)\sin\left(\frac{y}{2}\right) & \frac{1}{2}\cos(x+1)\cos\left(\frac{y}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Wir schätzen die Matrixkomponenten betragsmäßig nach oben ab. Wegen $(x,y)\in E=[-1,1]^2$ können alle Kosinuswerte die 1 annehmen. Da $x+1$ den Wert $\frac{\pi}{2}$ und $y-1$ den Wert $-\frac{\pi}{2}$ annehmen können, müssen wir diese Sinuswerte ebenfalls durch 1 abschätzen. $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ und $\sin\left(\frac{y}{2}\right)$ können wir auf E (betragsmäßig) durch $\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ abschätzen; also ergibt die elementweise Betragsabschätzung (zulässig in der $\|\cdot\|_1$- und $\|\cdot\|_\infty$-Norm, nicht jedoch in der $\|\cdot\|_2$-Norm):

$$\|F'(x,y)\|_1 \le \left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sin\left(\frac{1}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\|_1 = \left\|\begin{pmatrix} 0.5 & 0.47943 \\ 0.47943 & 0.5 \end{pmatrix}\right\|_1 =: \|F'_{max}\|_1\ .$$

$(\|F'_{max}\|_\infty =)\ \|F'_{max}\|_1 = 0.97943 \le 0.98 =: L$; d.h. F ist (nach unserer Abschätzung gerade noch) kontraktiv auf E.

Somit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

(5)

zu b)

Startwert: $x^0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Schritt: $x^1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ und für c) $x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. Schritt: $x^2 := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.258819 \\ -0.578012 \end{pmatrix}$ $\quad x^2 - x^1 = \begin{pmatrix} 0.008819 \\ -0.078012 \end{pmatrix}$

(1)

zu c) Es ist $\|x^1-x^0\|_1 = \frac{3}{4}$ und somit gemäß a-priori-Abschätzung

$$\|x^2-x^*\|_1 \le \frac{L^2}{1-L}\|x^1-x^0\|_1 = \frac{0.98^2}{1-0.98}\frac{3}{4} = \frac{75}{2}0.98^2 = 36.015\ (< 37)\ .$$

$$\left(\textbf{Für} \quad L = 0.97943 \ : \qquad \|x^2 - x^*\|_1 \leq \frac{L^2}{1-L}\,\|x^1 - x^0\|_1 = 34.968\right)$$

Es ist $\|x^2 - x^1\|_1 = 0.008819 + 0.078012 = 0.086831$ und somit gemäß a-posteriori-Abschätzung

$$\|x^2 - x^*\|_1 \leq \frac{L}{1-L}\,\|x^2 - x^1\|_1 = \frac{0.98}{1-0.98} \cdot 0.086831 = 49 \cdot 0.086831 = 4.25473 \; (< 4.3) \; .$$

$$\left(\textbf{Für} \quad L = 0.97943 \ : \qquad \|x^2 - x^*\|_1 \leq \frac{L}{1-L}\,\|x^2 - x^1\|_1 = 4.1335\right)$$

(2)

zu d) Es gilt gemäß a-priori-Abschätzung

$$\|x^n - x^*\|_1 \leq \frac{L^n}{1-L}\,\|x^1 - x^0\|_1 \overset{!}{\leq} \varepsilon \Longleftrightarrow$$

$$n \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^1-x^0\|}}{\ln L} = \frac{\ln\left(\frac{10^{-5}\,0.02}{\frac{3}{4}}\right)}{\ln(0.98)} = \frac{\ln\left(8\,\frac{10^{-7}}{3}\right)}{\ln(0.98)} = 749.2\ldots \quad .$$

$$\left(\textbf{Für} \quad L = 0.97943 \ : \qquad n \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^1-x^0\|}}{\ln L} = 726.8\ldots\right)$$

Es sind also höchstens $n = 750$ (727) Schritte erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-5}$ zu erreichen.

(1)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben seien die Funktionswerte einer Funktion $f(x)$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{208}{25}$	4	0	-1	6	$\frac{21}{2}$

Diese Funktion soll durch ein Polynom mit den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ interpoliert werden.

a) Bestimmen Sie die Newton-Darstellung des Polynoms $P(f|x_0, x_1, x_2)(x)$.

b) Werten Sie die Newton-Darstellung aus Teilaufgabe a) mit dem Horner-Schema an der Stelle $y = -0.75$ aus.

c) Schätzen Sie den Fehler $|f(-0.75) - P(f|x_0, x_1, x_2)(-0.75)|$ möglichst gut ab.
Hinweis: Für die Ableitungen von f gilt $|f^{(1)}(x)| \leq 10, |f^{(2)}(x)| \leq 11, |f^{(3)}(x)| \leq 28, |f^{(4)}(x)| \leq 57$ für $x \in [-1, 1]$.

d) Wählen Sie eine zusätzliche ganze Zahl $x_3 \in \mathbb{Z}$ als Stützstelle so, dass $f(x)$ an der Stelle $y = -0.75$ möglichst gut approximiert wird. Begründen Sie Ihre Wahl.

a) Newton-Tableau

x_i	$f_i = P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
-1	0		
0	-1	-1	
1	6	7	4

,

$$P(f|x_0, x_1, x_2)(x) = 0 - (x+1) + 4\,(x+1)\,x$$

(1)

b) Hornerartige Auswertung:

$$(y+1)(-1+4y) = \frac{1}{4} \cdot (-4) \;=\; -1.$$

(1)

c)

$$|P(f|x_0, x_1, x_2)(y) - f(y)| \leq \left| \prod_{j=0}^{2} (y - x_j) \right| \max_{x \in [-1,1]} \frac{|f'''(x)|}{3!}$$

Dies liefert

$$|f(-0.75) - P(f|x_0, x_1, x_2)(-0.75)| \leq 0.328125 \cdot \frac{28}{6} = 1.53125.$$

(2)

d) Über die Ableitungen in dem nun größeren Intervall können wir nichts sagen. Also wählen wir die Stützstelle so, dass der zusätzliche Faktor durch das Knotenpolynom minimal wird und gleichzeitig das Intervall möglichst wenig vergrößert wird. Dies ist für die Stelle $y = -0.75$ durch die Wahl der Stützstelle $x_3 = -2$ gegeben.

(1)

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Es sei $f(x) := \exp(x^2/3 - x)$. Wir betrachten das Integral

$$\int_0^2 \exp(x^2/3 - x)dx$$

und seine numerische Approximation. Die 2-Punkte Gauß-Formel auf $[-1, 1]$ ist durch

$$\int_{-1}^1 g(x)dx \approx g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

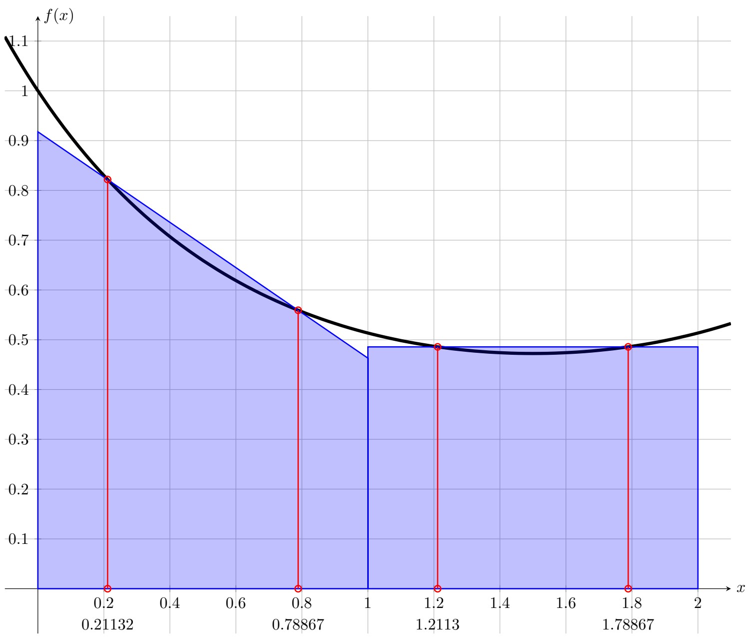
gegeben.

a) Wir möchten das Integral mit Hilfe der summierten 2-Punkte Gauß-Formel mit der Schrittlänge $h = 1$ approximieren. Zeichnen Sie die Fläche, die mit dieser Quadraturregel ausgerechnet wird, in die Abbildung (s.u.) ein. Schreiben Sie die numerischen Werte der Stellen, an denen f ausgewertet werden muss, in die Skizze.

b) Bestimmen Sie für die summierte Mittelpunktsregel eine geeignete Schrittweite h so, dass der Quadraturfehler unter der Schranke $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$ bleibt.
Hinweis: Für alle Ableitungen von f gilt $|f^{(n)}(x)| \leq |f^{(n)}(0)|$ für $x \in [0, 2]$.

c) Führen Sie die Berechnung der summierte Mittelpunktsregel für die in b) gefundene Schrittweite h durch.

a)



Wie auch bei den Newton-Cotes-Formeln wird bei der Gaußqudratur zu gegebenen Stützstellen x_i das Interpolationspolynom durch die Punkte $(x_i,\ f(x_i)$ gelegt und dieses dann (exakt) integriert:

$$\sum_{i=0}^m \omega_i\, f(x_i) = \int_c^d P(f|x_0, \ldots, x_m)(x)\, dx \qquad .$$

Für das Intervall $I = [0, 2]$ und $h = 1$ haben wir für die summierte Regel die Teilintervalle $I_0 = [0, 1]$ und $I_1 = [1, 2]$. Als Stützstellen erhalten wir $x_{00} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 1 = 0.21132$ und $x_{01} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 1 = 0.78867$ sowie $x_{10} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = 1.2113$ und $x_{11} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} = 1.7887$. Nun müssen nur noch die Geraden durch die zugehörigen Werte gelegt werden.

(2)

b) Für den Fehler der summierten Mittelpunktregel gilt

$$|I(f) - Q(f)| \leq \frac{b-a}{24} h^2 \max_{z \in [a,b]} |f''(z)|$$

Für die Ableitungen haben wir:

$$f'(x) = \left(\frac{2}{3}\,x - 1\right) e^{\left(\frac{1}{3}\,x^2 - x\right)},$$
$$f''(x) = \left(\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\,x - 1\right)^2\right) e^{\left(\frac{1}{3}\,x^2 - x\right)} = \left(\frac{4}{9}\,x^2 - \frac{4}{3}\,x + \frac{5}{3}\right) e^{\left(\frac{1}{3}\,x^2 - x\right)}$$

Gemäß **Hinweis** gilt auf $[0, 2]$:

$$|f''(x)| \leq \frac{5}{3}\,e^0 = \frac{5}{3}$$

Somit gilt

$$|I(f) - Q(f)| \leq \frac{2}{24}\,h^2\,\frac{5}{3} \overset{!}{\leq} 5 \cdot 10^{-2}.$$

Dies ist für $h \leq \sqrt{36 \cdot 10^{-2}} = \frac{6}{10} = 0.6 =: \tilde{h}$ erfüllt. Folglich $n \geq 2/\tilde{h} = \frac{10}{3} = 3.3\ldots$ und somit $n = 4$ sowie $h = 0.5$.

(2)

c)

$$Q(f) = 0.5\,(f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)) = 0.5 \cdot 2.3296 = 1.1648$$

(1)