Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. Falls nicht anders gefordert, muss das Ergebnis als Dezimalzahl angegeben werden.

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps $:= \frac{b^{1-m}}{2}$ die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung.

1.	In $\mathbb{M}(10, 5, -8, 8)$ gilt $\text{eps} = 5 \cdot 10^{-5}$.	wahr
2.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \leq \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x(1 + \epsilon)$.	wahr
3.	Es gilt: $\lvert\text{fl}(x) - x\rvert \leq \text{eps}\lvert x\rvert$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	wahr
4.	Es gilt $x_{\text{MAX}} = b^R$.	falsch
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 36 in $\mathbb{M}(7, 4, -8, 8)$ an.	**51**
6.	In $\mathbb{M}(2, 4, -4, 4)$ gilt $x_{\text{MIN}} = \frac{1}{64}$.	falsch
7.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der durch Rundungseffekte verursachte Fehler im Ergebnis von derselben Größenordnung wie der durch die Kondition des Problems bedingte unvermeidbare Fehler.	wahr
8.	Es seien $x = 3$ und $y = 3 + 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $e^x - e^y$ tritt Auslöschung auf.	wahr
9.	Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ist für alle $x \in [-1, 1]$ gut konditioniert.	wahr
10.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x, y)$ der Funktion $f(x, y) = x^2y^3$ im Punkt $(2, 1)$.	**3**

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

1.	Es sei $B := DA$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\lVert B\rVert_\infty = 1$.	wahr
2.	Es seien $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung x^* und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Es gilt $\frac{\lVert x^*-\tilde{x}\rVert}{\lVert x^*\rVert} \leq \kappa(A)\frac{\lVert r\rVert}{\lVert b\rVert}$, mit $\kappa(A) := \lVert A\rVert\lVert A^{-1}\rVert$.	wahr
3.	Für die Konditionszahl der Matrix A gilt $\kappa(A)\kappa(A^{-1}) = 1$.	falsch
4.	Es existiert immer eine L-R-Zerlegung der Form $PA = LR$, wobei P eine geeignete Permutationsmatrix ist.	wahr
5.	Berechnen Sie $\det(A^{-1})$ für $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.	**0.1**
6.	Die Gauß-Elimination ohne Pivotisierung ist für jede symmetrisch positiv definite Matrix A durchführbar.	wahr
7.	Die Gauß-Elimination mit Pivotisierung führt auf eine Zerlegung $P\,A = L\,R$.	wahr
8.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung x über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung beträgt etwa $\frac{1}{6}n^3$ Operationen.	falsch
9.	Es sei $A = L\,D\,L^T$ die L-D-L^T-Zerlegung von A mit einer Diagonalmatrix D, für die $\det(D) > 0$ gilt. Dann ist A symmetrisch positiv definit.	falsch
10.	Es seien $n = 4$ und $A = L\,D\,L^T$ die L-D-L^T-Zerlegung von A mit einer Diagonalmatrix D, für die $d_{ii} = i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ gilt. Berechnen Sie $\det(A)$.	**24**

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = Q\,R$ eine Q-R-Zerlegung von A, mit einer oberen Dreiecksmatrix R. Weiterhin seien $H_1, \ldots, H_k$ Householder-Transformationen mit $Q^T = H_k \ldots H_2\,H_1$.		
1.	Für jede symmetrische orthogonale Matrix Q gilt $Q^2 = I$.	wahr
2.	Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ mit $\lvert\alpha\rvert = 1$. Dann ist A eine orthogonale Matrix.	wahr
3.	Es gilt $\lvert\det(A)\rvert = \lvert\det(R)\rvert$.	falsch
4.	Es gilt $A^TA = R^TR$.	wahr
5.	Es seien $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Q_v die Householder Transformation bezüglich v. Geben Sie $e_1^T\,Q_v\,v$ an.	**-2**
6.	Es seien $m = n$ und $\det(A) \neq 0$. Dann gilt: $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.	wahr
7.	Die Householder-Methode zur Bestimmung der Q-R-Zerlegung ist nur durchführbar wenn A vollen Rang hat.	falsch
8.	Jede Householder-Transformation H_j ist symmetrisch positiv definit.	falsch
9.	Die Produktmatrix Q^T ist orthogonal.	wahr
10.	Es seien $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und Q_v die Householder Transformation bezüglich v. Geben Sie $\lVert Q_v\,x\rVert_2^2$ an.	**20**

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n \leq m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$ gilt. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \lVert A\,x - b\rVert_2$ und Θ der Winkel zwischen Ax^* und b. Ebenso sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\lVert F(\hat{x})\rVert_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \lVert F(x)\rVert_2$.		
1.	Je kleiner der Betrag des Winkels Θ, desto schlechter ist das lineare Ausgleichsproblem konditioniert.	falsch
2.	Es gilt $\lVert Ax - b\rVert_2 = \min \;\Leftrightarrow (Ax - b) \perp \text{Bild}(A)$, wobei $\text{Bild}(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.	wahr
3.	Es gilt $\lVert Ax\rVert_2 = \lVert Rx\rVert_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	wahr
4.	Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(R)$.	wahr
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Θ.	**0**
6.	Es sei $Qb =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $x^* = R^{-1}b_1$.	wahr
7.	Beim Gauß-Newton Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.	falsch
8.	Die Konvergenzordnung des Levenberg-Marquardt-Verfahrens ist in der Regel größer als die der Gauß-Newton-Methode.	falsch
9.	Mit einer geeigneten Wahl des im Levenberg-Marquardt-Verfahren verwendeten Parameters μ kann man den Einzugsbereich der Methode vergrößern.	wahr
10.	Es seien $m = 3$, $n = 2$ und $Q\,b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\lVert Ax^* - b\rVert_2$.	**3**

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung (Jacobi-Matrix) von Φ an der Stelle x.
Weiterhin sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Für das Intervall $[a, b]$ gilt, dass $a < x^* < b$, wobei x^* die einzige Nullstelle von f in $[a, b]$ ist.

1.	Es seien $n = 1$, $\Phi(x) := \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$, und $x^* = 0$. Die Fixpunktiteration konvergiert für alle Startwerte x_0 mit $\lvert x_0\rvert \leq \delta$ und $\delta > 0$ hinreichend klein.	wahr
2.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration mindestens 2.	wahr
3.	Falls $\lVert\Phi'(x^*)\rVert_\infty = 2$ und $\lVert\Phi'(x^*)\rVert_2 = 0.6$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^*.	wahr
4.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) := e^{-x}$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0.1, 2]$ erfüllt.	wahr
5.	Es sei $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Bestimmen Sie $\Phi'(x^*)$.	**0**
6.	Das vereinfachte Newton-Verfahren benötigt die Ableitung f' nicht.	falsch
7.	Es sei f konvex auf $[a, b]$, d.h. $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt: Das Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$.	falsch
8.	Das Sekanten-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$.	falsch
9.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren dient dazu, den Einzugsbereich der Methode zu vergrößern.	wahr
10.	Es seien x_0 ein Startwert aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* und x_k, $k \geq 1$, die mit dem Newton-Verfahren berechnete Folge. Geben Sie den Wert für p so an, dass $x^* - x_k \approx (x_{k+1} - x_k)^p$ für k hinreichend groß gilt.	**1**

VF-6: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ interpoliert.
Weiter seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Es gilt: $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x) + \Pi_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	falsch
2.	Es gilt $\max_{x\in[a,b]} \lvert P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\rvert \leq \max_{x\in[a,b]} \lvert P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x) - f(x)\rvert$.	falsch
3.	Es gilt $P(Q \mid x_0, \ldots, x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n.	wahr
4.	Es sei $\ell_{jn}(x) = \Pi_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$, $0 \leq j \leq n$. Dann gilt $P(f\lvert x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ell_{jn}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	wahr
5.	Es seien $f(x) = x^2$, $x_0 = -1$ und $x_1 = 5$. Bestimmen Sie den Wert $[x_0, x_1]f$.	**4**
Es sei $f \in C^\infty([a, b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden. Weiter sei $I_m(f) = (b - a)\sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ eine Quadraturformel mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$.		
6.	Die relative Kondition, bezüglich der Maximumnorm, der Bestimmung von $I(f)$ ist gut.	falsch
7.	Bei der Gauß-Quadratur und bei den Newton-Cotes Formeln sind die Gewichte w_j unabhängig von der Funktion f.	wahr
8.	Die Gauß-Quadratur basiert auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an f, wobei die Stützstellen so gewählt werden, dass der Exaktheitgrad von I_m maximal wird.	wahr
9.	Für die Newton-Cotes Formeln gilt $\lim_{m\to\infty} \lvert I_m(f) - I(f)\rvert = 0$.	falsch
10.	Es seien $a = 0$, $b = 1$ und $I_2(f)$ die Simpsonregel. Geben Sie das kleinste n an, für das der Fehler $I(2\,x^n + x) - I_2(2\,x^n + x)$ **nicht** 0 ist.	**4**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2\,\alpha+2 & -2 \\ 4 & -\alpha+1 & 2\,\alpha-1 \\ 0 & 4\,\alpha & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -8\,\alpha \\ -16 \end{pmatrix} \text{ und } \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

a) Bestimmen Sie die L-R-Zerlegung der Matrix A mit Pivotisierung. Geben Sie L, R und P explizit an.

b) Berechnen Sie $\det(A)$ unter Verwendung der in a) gefundenen Zerlegung für alle $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Für welche α hat die Matrix A vollen Rang?

c) Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems $A\,x = b$ unter Verwendung der in a) gefundenen Zerlegung für alle $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\det(A) \neq 0$.

a) L-R-Zerlegung mit Pivotisierung:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2\,\alpha+2 & -2 \\ 4 & -\alpha+1 & 2\,\alpha-1 \\ 0 & 4\,\alpha & 4 \end{pmatrix} \underset{\text{Gauß}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 8 & 2\,\alpha+2 & -2 \\ 1/2 & -2\alpha & 2\alpha \\ 0 & 4\alpha & 4 \end{pmatrix}.$$

(Für $\alpha = 0$ hat man nach dem ersten Gauß-Schritt (bis auf Zeilenvertauschung) schon die L-R-Zerlegung. Sonst:)
$|4\,\alpha| > |-2\,\alpha|$ für $\alpha \neq 0$ da $4 > 2$

$$\underset{\text{Pivot }(2,3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 8 & 2\,\alpha+2 & -2 \\ 0 & 4\,\alpha & 4 \\ 1/2 & -2\,\alpha & 2\,\alpha \end{pmatrix} \underset{\text{Gauß}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 8 & 2\,\alpha+2 & -2 \\ 0 & 4\,\alpha & 4 \\ 1/2 & -1/2 & 2\,\alpha+2 \end{pmatrix}$$

Also gilt $P\,A = L\,R$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 8 & 2\,\alpha+2 & -2 \\ 0 & 4\,\alpha & 4 \\ 0 & 0 & 2\,\alpha+2 \end{pmatrix} \text{ und } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(In der Praxis wird nicht die Matrix P sondern der Pivotvektor gespeichert.)

(3)

b) Wir haben für $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\det(P\,A) = \det(P)\,det(A) = (-1)^{\#Zeilenvertauschungen}\,det(A) = -\det(A)$$
$$\det(L\,R) = \det(R) = 8\cdot 4\,\alpha\cdot(2\,\alpha+2) = 64\,\alpha\,(\alpha+1)$$

Also: $\det(A) = -\det(R) = -64\,\alpha\,(\alpha+1)$. A hat vollen Rang genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$. $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn $\alpha \neq -1$ (und $\alpha \neq 0$). **(1)**

c) Vorwärtseinsetzen:

$$L\,y = P\,b \quad\longrightarrow\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & -8\,\alpha \end{array}\right)\downarrow \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \\ -8\,\alpha-8 \end{pmatrix}.$$

(1)

Rückwärtseinsetzen ($2\,\alpha+2 \neq 0$ und $4\,\alpha \neq 0$):

$$R\,x = y \quad\longrightarrow\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2\,\alpha+2 & -2 & 0 \\ 0 & 4\,\alpha & 4 & -16 \\ 0 & 0 & 2\,\alpha+2 & -8\,\alpha-8 \end{array}\right)\uparrow \longrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(1)

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \|Ay - b\|_2$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ und Daten $b = (1,0,1,0)^T \in \mathbb{R}^4$. Von der Matrix sei die Q-R-Zerlegung $A = Q\,R$ bekannt mit

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mithilfe der Q-R-Zerlegung. Geben Sie die Norm des Residuums $\|Ax - b\|_2$ an.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mithilfe der Normalgleichungen.
Hinweis: Die Matrix A muss dazu nicht ausgerechnet werden.

c) Es sei nun $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ eine beliebige Matrix mit *schlechter* Kondition und vollem Rang. Sollte man eher die Q-R-Zerlegung oder die Normalengleichungen zum Lösen eines linearen Ausgleichproblems mit A nehmen? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Berechne

$$Q^T\,b = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Löse anschließend $\tilde{R}\,x = b_1$, also

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.117851 \\ 0.235702 \end{pmatrix}.$$

Das Residuum ist durch $\|b_2\|_2 = 1$ gegeben. **(2)**

b) Wegen $A^T\,A = R^T\,Q^T\,Q\,R = R^T\,R = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 25 \end{pmatrix}$ und

$A^T\,b = R^T\,Q^T\,b \overset{(a)}{=} R^T\,\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, lauten die Normalgleichungen

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 25 \end{pmatrix} x = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Lösung per Cholesky (L-D-L^T) ergibt $x = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.117851 \\ 0.235702 \end{pmatrix}$. **(2)**

c) Für eine schlecht konditionierte Matrix A sind die Normalgleichungen wegen $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$ deutlich schlechter konditioniert als das Ausgleichsproblem. Darum sollte man sie für eine schlecht konditionierte Matrix A nicht benutzen. Dieses Problem tritt beim Lösen mit Hilfe der Q-R-Zerlegung nicht auf. Daher sollte man diese bevorzugen. **(1)**

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Gesucht sind die Lösungen des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x^2 + 2\,y^2 - 18 &= 0 \\ 2\,x\,y + 3\,x - 7 &= 0 \end{aligned}$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, die die Lage der Lösung(en) im 1. Quadranten verdeutlicht. Bestimmen Sie einen *guten*, d.h. möglichst kleinen ganzzahligen Bereich $[x_u, x_o] \times [y_u, y_o]$, in dem eine Lösung liegt.

b) Geben Sie für die in a) fixierte Lösung eine geeignete 2D-Fixpunktgleichung an, und weisen Sie hierfür die Voraussetzungen des Fixpunksatzes von Banach nach. Begründen Sie Ihre Aussagen.

c) Eine weitere Lösung liegt in $[4,5] \times [-1,0]$. Für diese ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{18 - 2\,y^2} \\ \dfrac{7 - 3\,x}{2\,x} \end{pmatrix}$$

eine geeignete Fixpunktiteration mit Kontraktionszahl (bezüglich der ∞-Norm) $L = 0.5$. Wieviele Schritte sind ausgehend von dem ganzzahligen Startwert $(x_0, y_0) = (4, -1)$ höchstens erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = \frac{3}{4} \cdot 10^{-8}$ zu erzielen.

d) Geben Sie eine a–posteriori–Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an.

zu a)

Skizze:

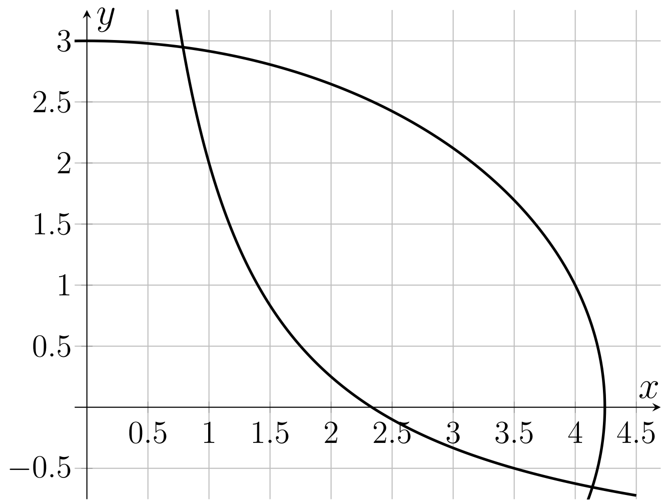
Ellipse in Normallage mit Hauptachsen $a = \sqrt{18} \approx 4.34$ und $b = 3$,

Hyperbel als

$$y(x) = \frac{7 - 3\,x}{2\,x} = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{3}{2}$$

mit Polstelle $x = 0$, Nullstelle $x = 7/3$ und Asymptote $y = -3/2$ sowie dem Funktionswert an der Stelle $x = 1$ ($y(1) = 2$)).

Der Fixpunkt im 1. Quadranten liegt ungefähr bei $(0.75, 2.95)$. Der geforderte *ganzzahlige* Bereich ist also $D = [0,1] \times [2,3]$.



(1)

zu b)

Wir lösen die erste Gleichung nach y und die zweite Gleichung nach x auf (Auflösung nach y führt gem. Skizze auf eine Steigung < -1. Zudem liegt bei $x = 0$ eine Polstellle vor.):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{2\,y+3} \\ \sqrt{9 - \dfrac{x^2}{2}} \end{pmatrix} =: F(x,y) \to F'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-14}{(2\,y+3)^2} \\ \dfrac{-x}{2\sqrt{9 - \dfrac{x^2}{2}}} & 0 \end{pmatrix}$$

D ist abgeschlossen / vollständig.

Abb. in sich:

Wir haben hier den (vereinfachten) Sonderfall, dass $F_1(x,y) = f_1(y)$ und $F_2(x,y) = f_2(x)$ ist. Obige Ableitung zeigt: Die erste Komponente ist als Funktion (nur) von y für $y \in \mathbb{R}\backslash\{-3/2\}$ und die zweite als Funktion (nur) von x für $x \in [0, \sqrt{18}]$ (streng) monoton fallend. Also: $f(D) = [7/9, 1] \times [\sqrt{17/2}, 3] = [0.\overline{7}, 1] \times [2.915476, 3] \subset D$

kontraktiv:

D ist **konvex** und F ist stetig differenzierbar. Da $(1,3)$ als Startwert gewählt wird und dieser in $F(D)$ liegt, könnten wir für die Kontraktivität bereits eine Einschränkung auf $D' = F(D)$ machen. Dieses Gebiet ist ebenfalls konvex.

Daher dürfen wir die Kontaktivität mit F' zeigen. Für die Norm von F' auf $D\,(D')$ erhalten wir die maximalen Einträge (zulässig für die 1- und die ∞-Norm) (betragsgrößter Zähler durch betragskleinster Nenner):

$$\frac{14}{(2\cdot 2+3)^2} = \frac{2}{7} = 0.28571\ldots \qquad \left(\frac{14}{\left(2\sqrt{\frac{17}{2}}+3\right)^2} = \frac{14}{(\sqrt{34}+3)^2} = 0.17952\ldots\right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{9-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{34}} = 0.1715$$

Damit ist F auch kontraktiv auf D mit (z.B.) $L = 0.3$. ($L' = 0.18$ für D'.)

(5)

zu c)
Jetzt

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{18-2\,y^2} \\ \dfrac{7-3\,x}{2\,x} \end{pmatrix}\quad,\ \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{5}{8} \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^\star\|_\infty \le \frac{L^n}{1-L}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_\infty \overset{!}{\le} \varepsilon = \frac{3}{4}\cdot 10^{-8} \Leftrightarrow n \ge \frac{\ln \dfrac{\varepsilon(1-L)}{\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0\|_\infty}}{\ln L} = \frac{\ln \dfrac{3/4\cdot 10^{-8}\cdot 1/2}{3/8}}{\ln(1/2)} = \frac{8\,\ln 10}{\ln 2} = 26.5\ldots$$

Also bringen 27 Schritte mit Sicherheit die geforderte Genauigkeit.

(2)

zu d)

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^\star\|_\infty \le \frac{L}{1-L}\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|_\infty$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4.14955 \\ -0.625 \end{pmatrix} \to \Delta\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.14955 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und somit:

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^\star\|_\infty \le \frac{0.5}{1-0.5}\,0.14955 = 0.14955 < 0.15$$

(1)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für die Funktion F ist eine Wertetabelle gegeben.

x	-1	0	1	2	3	4	5
$F(x)$	-2	1	3	3	2	1	1

a) Gesucht ist eine möglichst gute Näherung für $F(1.5)$ mit der Hilfe eines Polynoms zweiten Grades. Welche Stützstellen wählen Sie, um dieses Polynom zu bestimmen, und warum? Berechnen Sie den entsprechenden Näherungswert mit dem Neville-Aitken-Schema.

b) Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für den in Aufgabenteil a) berechneten Näherungswert an.

Hinweis: Es gilt $|F^{(n)}(x)| \leq 2^n + 4$, für alle n und alle $x \in [-1, 5]$.

a) Für das Polynom p_2 müssen wir 3 Tabellenwerte benutzen, da wir ein Interpolation von Grad zwei konstruieren. Die diesbezügliche Fehlerabschätzung lautet

$$(*) \qquad |f(1.5) - p_2(1.5)| \leq \frac{1}{3!} \max_{x \in [x_0, x_2]} |f^{(3)}(x)| \cdot |(1.5 - x_0)\,(1.5 - x_1)\,(1.5 - x_2)|$$

wobei $x_0 < x_1 < x_2$ die Stützstellen sind. Der Knotenpolynom-Anteil in der Fehlerformel wird sowohl durch die Wahl $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ als auch durch $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ minimiert. **(1)**

Tableau:

$$\begin{array}{c|cccccc}
x_i & P_{i,0} & & P_{i,1} & & P_{i,2} \\ \hline
0 & 1 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
1 & 3 & \rightarrow & 3 + \frac{3-1}{1-0}(1.5-1) = 4 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
2 & 3 & \rightarrow & 3 + \frac{3-3}{2-1}(1.5-2) = 3 & \rightarrow & 3 + \frac{3-4}{2-0}(1.5-2) = 3.25 \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
3 & 2 & \rightarrow & 2 + \frac{2-3}{3-2}(1.5-3) = 3.5 & \rightarrow & 3.5 + \frac{3.5-3}{3-1}(1.5-3) = 3.125
\end{array}$$

Also $F(1.5) \approx p_2(1.5) = 3.25 \qquad (3.125)$. **(2)**

b) Aus (*) und dem Hinweis folgt (in beiden Fällen):

$$|f(1.5) - p_2(1.5)| \leq \frac{2^3 + 4}{6} \cdot 1.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = \frac{3}{4} = 0.75.$$

(1)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Gegeben sei die Quadraturformel

$$Q(f) = c_0\, f(-1) + c_1\, f(0) + c_2\, f(1)\ ,$$

die näherungsweise das Integral $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ berechnet.

a) Leiten Sie die Werte für c_0, c_1 und c_2 her, sodass die Quadraturformel mindestens den Exaktheitsgrad 2 hat.

b) Es sei $T > 2$ gegeben. Nutzen Sie die Quadraturformel aus a) um $f(x) := \dfrac{4}{x^2}$ auf dem Intervall $[2, T]$ näherungsweise zu integrieren. Falls Sie in a) keine Werte herausbekommen haben, rechnen Sie allgemein mit den Konstanten c_0, c_1 und c_2 weiter.

c) Es sei $T > 2$ gegeben. Bestimmen Sie für die summierte Trapezregel eine geeignete Anzahl Teilintervalle n so, dass der Quadraturfehler für das Integral $\displaystyle\int_2^T \frac{4}{x^2}\, dx$ unter $\varepsilon = 10^{-3}$ bleibt.

a) Die Bedingungen für den Exaktheitsgrad 2 sind

$$\begin{aligned}
Q(1) &= c_0 + c_1 + c_2 \overset{!}{=} 2 = \int_{-1}^{1} 1\, dx\ ,\\
Q(x) &= -\,c_0 +\ 0\ + c_2 \overset{!}{=} 0 = \int_{-1}^{1} x\, dx\ \rightarrow c_0 = c_2\\
\text{und}\qquad Q(x^2) &= c_0 +\ 0\ + c_2 \overset{!}{=} \frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2\, dx\ \rightarrow c_0 = c_2 = \frac{1}{3}\ .
\end{aligned}$$

Also $c_0 = c_2 = 1/3 = 0.33333$ und $c_1 = 4/3 = 1.3333$. **(2)**

Alternativ: Lemma 10.4: Die Integration der Lagrangen Fundamentalpolynome liefert ebenfalls die Gewichte.

b) Lineare Transformation $l : [-1, 1] \to [2, T]$ lautet: $t = l(x) = 2 + \frac{T-2}{2}(x + 1)\ \rightarrow\ dt = \frac{T-2}{2}\, dx$. Also folgt

$$\begin{aligned}
\int_2^T f(t)\, dt &= \frac{T-2}{2}\int_{-1}^{1} f(l(x))\, dx = \frac{T-2}{2}\int_{-1}^{1} \frac{4}{(2 + (T-2)/2\,(x+1))^2}\, dx\\
&\approx \frac{T-2}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{4}{2^2} + \frac{4}{3}\frac{4}{(T/2+1)^2} + \frac{1}{3}\frac{4}{T^2}\right) = \frac{T-2}{6} + \frac{8}{3}\frac{(T-2)}{(T/2+1)^2} + \frac{2}{3}\frac{(T-2)}{T^2}
\end{aligned}$$

(2)

Alternativ: Die Transformation der Formel kann (wegen der Symmetrie) auch wie folgt geschehen:

$$\frac{\textit{neue Intervalllänge}}{\textit{alte Intervalllänge}}\left(\frac{1}{3} f(\textit{linker Rand}) + \frac{4}{3} f(\textit{Mitte}) + \frac{1}{3} f(\textit{rechter Rand})\right)$$

c) Für den Fehler der summierten Trapezregel gilt:

$$|T(f) - I(f)| \le \frac{T-2}{12} h^2 \max_{x\in[2,T]} |f''(x)|\ .$$

Für $x > 0$ gilt: $f''(x) = 24/x^4$ ist monoton fallend und positiv. Also is das Maximum bei $x = 2$. Es folgt:

$$|T(f) - I(f)| \le \frac{3\, h^2 \cdot (T-2)}{24} = \frac{3\left(\frac{T-2}{n}\right)^2 (T-2)}{24} = \frac{(T-2)^3}{8\, n^2} \le 10^{-3}.$$

und damit

$$n \ge \sqrt{\frac{(T-2)^3}{8 \cdot 10^{-3}}} = 5\sqrt{5}\,\sqrt{(T-2)^3} = 11.180\,\sqrt{(T-2)^3} =: \tilde{n}$$

Lösung ist somit das kleinste ganzzahlige n mit $n \ge \tilde{n}$. **(2)**