Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. Falls nicht anders gefordert, muss das Ergebnis als Dezimalzahl angegeben werden.

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps $:= \frac{b^{1-m}}{2}$ die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung.		
1.	In $\mathbb{M}(2, 3, -3, 3)$ gilt $x_{\text{MIN}} = \frac{7}{64}$.	falsch
2.	In $\mathbb{M}(2, 5, -8, 8)$ gilt eps $= \frac{1}{32}$.	wahr
3.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \le$ eps und $\lvert\text{fl}(x) - x\rvert = \lvert\epsilon\rvert$.	falsch
4.	Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems in der Regel instabil.	falsch
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 24 in $\mathbb{M}(4, 4, -8, 8)$ an.	**120**
6.	Die Multiplikation zweier Zahlen ist stets gut konditioniert.	wahr
7.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der durch Rundungseffekte verursachte Fehler im Ergebnis von derselben Größenordnung wie der durch die Kondition des Problems bedingte unvermeidbare Fehler.	wahr
8.	Es seien $x = 3$ und $y = 3 + 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $e^{xy} - e^{y}$ tritt Auslöschung auf.	falsch
9.	Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ist gut konditioniert für alle $x \in (-1, 1)$.	falsch
10.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x, y)$ der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^3$ im Punkt $(1, 1)$.	**1.5**

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Ziel der Zeilenäquilibrierung ist es, ein äquivalentes Gleichungssystem zu erhalten, dessen Systemmatrix eine kleinere Konditionszahl als A hat.	wahr
2.	Es seien $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung x^* und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Es gilt $\frac{\lVert x^*-\tilde{x}\rVert}{\lVert x^*\rVert} \le \lVert A^{-1}\rVert \frac{\lVert r\rVert}{\lVert b\rVert}$.	falsch
3.	Für die Konditionszahl der Matrix A gilt $\kappa(A) \ge 1$.	wahr
4.	Ohne Pivotisierung ist Gauß-Elimination für A nicht immer durchführbar.	wahr
5.	Berechnen Sie $\kappa_2(A)$ der Matrix $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.	**5**
6.	Pivotisierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination.	wahr
7.	Die Gauß-Elimination mit Pivotisierung führt auf eine Zerlegung $A = LR$.	falsch
8.	Es sei A eine untere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung des Gleichungsssytems $Ax = b$ über Vorwärtseinsetzen beträgt etwa $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.	wahr
9.	Es sei $A = LDL^T$ mit einer normierten untere Dreiecksmatrix L und einer Diagonalmatrix D mit nur strikt positiven Diagonaleinträgen. Dann ist A symmetrisch positiv definit.	wahr
10.	Berechnen Sie $\lVert A\rVert_1$ für $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.	**11**

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = QR$ eine QR-Zerlegung von A, mit einer oberen Dreiecksmatrix R.

1.	Es gilt $R = Q^T A$.	wahr
2.	Für jede orthogonale Matrix Q gilt $Q^2 = I$.	falsch
3.	Die Summe zweier orthogonaler $m \times m$- Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.	falsch
4.	Die Householder-Methode zur Bestimmung der QR-Zerlegung ist ein stabiles Verfahren.	wahr
5.	Es seien $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und Q_v die Householder Transformation bezüglich v. Geben Sie $(Q_v)_{1,1}$ an.	**0.8**
6.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$, $v \neq 0$, und Q_v die Householder Transformation bezüglich v. Es gilt $Q_{\alpha v} = Q_v$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.	wahr
7.	Die Givens-Methode zur Bestimmung der QR-Zerlegung ist nur durchführbar, wenn A vollen Rang hat.	falsch
8.	Jede Givens-Transformation ist symmetrisch und orthogonal.	falsch
9.	Es gilt: $\|A\|_2 = \|R\|_2$, wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm ist.	wahr
10.	Es seien $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $G \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Givens Transformation. Geben Sie $\|Gx\|_2^2$ an.	**13**

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$ gilt. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ und Θ der Winkel zwischen Ax^* und b.
Ebenso sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Dazu betrachten wir das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(\hat{x})\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.

1.	Die Kondition des linearen Ausgleichsproblems hängt vom Winkel Θ ab.	wahr
2.	Es gilt $\|Ax - b\|_2 = \|Rx - Q^T b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	falsch
3.	Es gilt $A^T A x^* = A^T b$.	wahr
4.	Es gilt $b^T (Ax^* - b) = 0$.	falsch
5.	Es seien $m = 4$, $n = 2$ und $Qb = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|Ax^* - b\|_2^2$.	**17**
6.	Es sei $Qb =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n,\ b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $\|x^*\|_2 = \|b_1\|_2$.	falsch
7.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein eindeutig lösbares lineares Ausgleichsproblem.	wahr
8.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, so ist die Konvergenzordnung in der Regel 1.	wahr
9.	Mit einer geeigneten Wahl des im Levenberg-Marquardt-Verfahren verwendeten Parameters kann man die Konvergenzordnung der Methode vergrößern.	falsch
10.	Es seien $m = 3$, $n = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie x^*.	**3**

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0,1,2,\dots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung (Jacobi-Matrix) von Φ an der Stelle x.
Weiterhin sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^*, es gelte $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*)$ sei regulär.

1.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\|x_0 - x^*\|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.	wahr
2.	Es seien $n = 1$, $\Phi(x) := \frac{1}{3}x^2 - 2x$, und $x^* = 0$. Die Fixpunktiteration konvergiert für alle Startwerte x_0 mit $\lvert x_0\rvert \le \delta$ und $\delta > 0$ hinreichend klein.	falsch
3.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = 2\cos(\frac{x}{3})$. Die Fixpunktiteration konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.	wahr
4.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist immer 1.	falsch
5.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) := x^2 + x - 4$. Geben Sie den eindeutigen negativen Fixpunkt von Φ an.	**-2**
6.	Wenn das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Lösung x^* von $f(x) = 0$ konvergiert, dann gilt für genügend große k-Werte : $\|\|x_k - x^*\|\| \approx \|\|x_k - x_{k+1}\|\|$.	wahr
7.	Die Newton-Methode zur Bestimmung der Lösung x^* von $f(x) = 0$ ist lokal quadratisch konvergent.	wahr
8.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren dient dazu, den Einzugsbereich der Methode zu vergrößern.	wahr
9.	Die Bisektionsmethode ist auch in Dimension $n > 1$ ein zuverlässiges Verfahren zur Bestimmung der Lösung x^* von $f(x) = 0$.	falsch
10.	Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren zu $f(x) = x^2 - 5$ mit dem Startwert $x_0 = 5$ die zweite Iterierte x_2.	**2.3333**

VF-6: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0,\dots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$ interpoliert. Weiter seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0,\dots,x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Es gilt: $P(f\,\vert\,x_0,\dots,x_n)(x) = P(f\,\vert\,x_0,\dots,x_{n-1})(x) + \delta_n \Pi_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	wahr
2.	Es sei $\ell_{jn}(x) = \Pi_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$, $0 \le j \le n$. Es gilt $P(f\vert x_0,\dots,x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} \ell_{jn}(x)[x_0,\dots,x_j]f$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	falsch
3.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \lvert P(f\,\vert\,x_0,\dots,x_n)(x) - f(x)\rvert$ ist minimal wenn man die Stützstellen x_i äquidistant wählt.	falsch
4.	Das Verfahren von Neville-Aitken ist eine effiziente Methode zur Bestimmung des Polynoms $P(f\,\vert\,x_0,\dots,x_n)$.	falsch
5.	Es sei $f(x) = x^2$. Bestimmen Sie den Wert $[x_0,x_1,x_2]f$.	**1**

Es sei $f \in C^\infty([a,b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden. Weiter sei $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ eine Quadraturformel mit $a \le x_0 < \dots < x_m \le b$.

6.	Bei der Gauß-Quadratur gilt: $I_m(f) = \int_a^b P(f\,\vert\,x_0,\dots,x_m)(x)\,dx$, wobei $P(f\,\vert\,x_0,\dots,x_m)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu geeignet gewählten Stützstellen x_i ist.	wahr
7.	Bei der Gauß-Quadratur gilt: $I_m(f) = I(f)$ falls f ein Polynom vom Grad maximal $2m + 1$ ist.	wahr
8.	Bei der Gauß-Quadratur und bei den Newton-Cotes Formeln sind die Stützstellen x_j unabhängig von der Funktion f.	wahr
9.	Es sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1,\dots,n$, mit $t_j = a + jh$, $h = \frac{b-a}{n}$. Der Exaktheitsgrad der summierten Quadraturformel $I_m^n(f)$ ist größer als der von $I_m(f)$.	falsch
10.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^2 x^3\,dx$ mit Hilfe der Simpsonregel.	**4**

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es seien $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante, sowie

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 9\lambda & 3\lambda+2 & 6\lambda+1 \\ 0 & 4\lambda & 2\lambda+1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung (ohne Pivotisierung) von A.

Es seien nun

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 11 \\ \frac{11}{4} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

und $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Dabei sind L und R die Matrizen der LR-Zerlegung von PDB, d.h. $PDB = LR$.

b) Berechnen Sie die Determinante von B.

c) Lösen Sie das Gleichungssystem $Bx = b$ mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

a)

LR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 9\lambda & 3\lambda+2 & 6\lambda+1 \\ 0 & 4\lambda & 2\lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ \hline 3\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 4\lambda & 2\lambda+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 3\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2\lambda & 1 \end{array}\right)$$

also

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{(2)}$$

b) Es gilt

$$\det(P)\det(D)\det(B) = \det(PDB) = \det(LR) = \det(L)\det(R)$$

und damit

$$\det(B) = \frac{\det(L)\det(R)}{\det(P)\det(D)} = \frac{1\cdot 36}{1\cdot 24} = \frac{3}{2} = 1.5. \qquad \mathbf{(1)}$$

c) Es gilt

$$B\,x = b \Leftrightarrow L\,R\,x = PDb.$$

Vorwärtseinsetzen (Substituiere $Rx = y$ und löse $Ly = PDb$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Rückwärtseinsetzen (Löse $Rx = y$):

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{(2)}$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Die Funktion $y(t) := (\sqrt{t} - a)^2 + \sqrt{t} - b^2$ soll im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimal an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	0.25	1	4
y_i	2	1	6

Bestimmen Sie die Parameter a und b näherungsweise:

a) Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$. Geben Sie F und x explizit an.

b) Für das Gauß-Newton-Verfahren ist der Startwert $(a^0, b^0) = (0, 1)$ gegeben. Stellen Sie das zugehörige linearisierte Ausgleichsproblem für den ersten Schritt auf.

c) Es sei nun $a = b = 1$. Geben sie für diesen Wert das Residuum des in a) aufgestellten nichtlinearen Ausgleichsproblems an.

Wir betrachten nun das linearisierte Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c^0 \\ \Delta d^0 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{(\Delta c^0, \Delta d^0)^T \in \mathbb{R}^2}$$

zum Startwert $(c^0, d^0) = (0, 1)$.

d) Führen Sie mit Hilfe dieses linearisierten Ausgleichsproblems einen Gauß-Newton-Schritt durch. Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mittels Normalgleichungen.

Teil a)
Die i-te Zeile der zu minimierenden Funktion $F(x) = F(a, b)$ lautet

$$F_i(x) := y(t_i) - y_i = (\sqrt{t_i} - a)^2 + \sqrt{t_i} - b^2 - y_i\ .$$

Gesucht ist somit x^* mit $||F(x^*)||_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^2} ||F(x)||_2$ mit $x = (a, b)$ und

$$F(x) = F(a,b) = \begin{pmatrix} (0.5-a)^2 + 0.5 - b^2 - 2 \\ (1-a)^2 + 1 - b^2 - 1 \\ (2-a)^2 + 2 - b^2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0.5-a)^2 - b^2 - 1.5 \\ (1-a)^2 - b^2 \\ (2-a)^2 - b^2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - a - b^2 - 1.25 \\ a^2 - 2\,a - b^2 + 1 \\ a^2 - 4\,a - b^2 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{(2)}$$

Teil b)
Aufgestellt werden soll

$$\left\| F(x^0) + F'(x^0)\Delta x^0 \right\|_2 \to \min_{\Delta x^0 = (\Delta a^0, \Delta b^0)^T \in \mathbb{R}^2}$$

Hier ist

$$F_i'(x) = (-2\sqrt{t_i} + 2a \qquad - 2b).$$

Damit ergibt sich

$$\left\| \begin{pmatrix} -2.25 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a^0 \\ \Delta b^0 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{(\Delta a^0, \Delta b^0)^T \in \mathbb{R}^2}. \qquad \mathbf{(2)}$$

Teil c)
Für $x = (1, 1)$ ist $\|F(x)\|_2$ zu berechnen:

$$\|F(x)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -2.25 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{22.0625} \approx 4.6970736\,(= 4.6971 < 4.7)\,. \qquad \mathbf{(1)}$$

Teil d)
Die Normalgleichungen des Ausgleichsproblems sind

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c^0 \\ \Delta d^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \Delta c^0 \\ \Delta d^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{33} \\ -\frac{2}{33} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} c^1 \\ d^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^0 \\ d^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta c^0 \\ \Delta d^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{33} \\ \frac{31}{33} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.575758 \\ 0.939394 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{(2)}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 3\,x\,y + 2 \\ x + y^2 + 2\,y - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

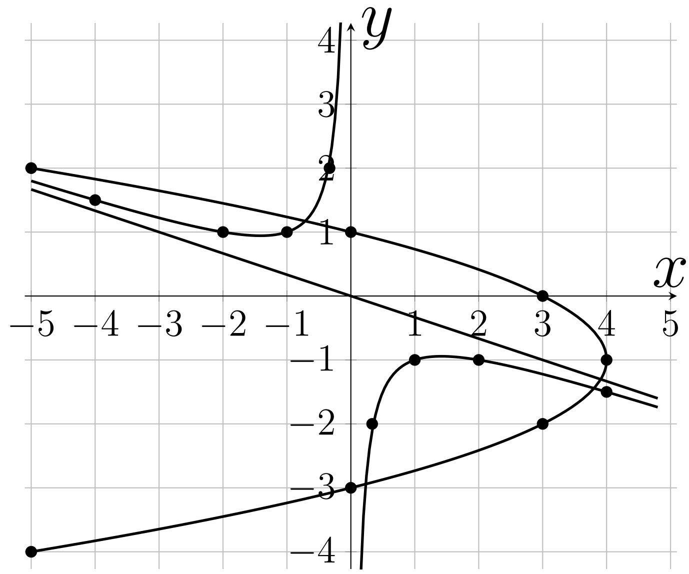
a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen mit $x > -2$ hervorgeht, und geben Sie für jede dieser Nullstellen einen geeigneten Startwert an (Genauigkeit ± 0.5).

b) Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 4. Quadranten für beide Verfahren

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.

Bem.: Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.



Teil a) Skizze:
Nach links geöffnete Parabel mit Scheitel bei $(4,-1)$ sowie Hyperbel mit Asymptoten $x = 0$ und $y = -1/3\,x$ oder Wertetabelle zu $y = -\frac{x^2+2}{3\,x}$. Zu skizzieren ist der **gesamte** Bereich mit $x > -2$:
Startwerte:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\begin{pmatrix} -6.5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ (nicht verlangt)}$$

(2)

Teil b)

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 3\,x\,y + 2 \\ x + y^2 + 2\,y - 3 \end{pmatrix} \to f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x + 3\,y & 3\,x \\ 1 & 2\,y + 2 \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 12 & | & -6 \\ 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to \Delta x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} \to x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1.5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3.5 & 12 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & -0.25 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3.5 & 12 & | & 0 \\ 0 & -4.428571428 & | & -0.25 \end{pmatrix} \to \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -0.1935483871 \\ 0.05645161291 \end{pmatrix} \to x_2 = \begin{pmatrix} 3.806451613 \\ -1.443548387 \end{pmatrix}$$

(4)

Vereinfachtes Newton-Verfahren (x_1 wie Newton):

$$x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1.5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 12 & | & 0 \\ 1 & 0 & | & -0.25 \end{pmatrix} \to \Delta x_1 = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.1041666667 \end{pmatrix} \to x_2 = \begin{pmatrix} 3.75 \\ -1.395833333 \end{pmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es ist die folgende Wertetabelle für eine unbekannte Funktion f gegeben

x	-0.30	0.10	0.50	0.90	1.30	1.70
$f(x)$	1.0453	1.0050	1.1276	1.4331	1.9709	2.8283

a) Berechnen Sie die fehlenden Werte $P_{i,k}$ in dem folgenden Neville-Aitken-Tableau für $f(1.0)$:

$$
\begin{array}{l|ccccccccccc}
x_0 = -0.30 & 1.0453 & & & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & & & \\
x_1 = 0.10 & 1.0050 & \rightarrow & 0.91432 & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & & & \\
x_2 = 0.50 & 1.1276 & \rightarrow & 1.2808 & \rightarrow & 1.5098 & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_3 = 0.90 & 1.4331 & \rightarrow & 1.5095 & \rightarrow & P_{3,2} & \rightarrow & 1.5405 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_4 = 1.30 & P_{4,0} & \rightarrow & 1.5676 & \rightarrow & 1.5458 & \rightarrow & 1.5439 & \rightarrow & P_{4,4} & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_5 = 1.70 & 2.8283 & \rightarrow & 1.3279 & \rightarrow & 1.5376 & \rightarrow & P_{5,3} & \rightarrow & 1.5431 & \rightarrow & 1.5432
\end{array}
$$

Geben Sie einen möglichst guten Näherungswert $p_2(1.0)$ für $f(1.0)$ basierend auf einem Polynom zweiten Grades an und begründen Sie Ihre Antwort.

b) Die obigen Werte gehören zu der Funktion $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$. Geben Sie eine möglichst scharfe Fehlerabschätzung für den Wert $P_{4,2}$ an, ohne jedoch die Funktion f auszuwerten!

a) Neville-Aitken-Tableau:

$$
\begin{array}{l|ccccccccccc}
x_0 = -0.30 & 1.0453 & & & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & & & \\
x_1 = 0.10 & 1.0050 & \rightarrow & 0.91432 & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & & & \\
x_2 = 0.50 & 1.1276 & \rightarrow & 1.2808 & \rightarrow & 1.5098 & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_3 = 0.90 & 1.4331 & \rightarrow & 1.5095 & \rightarrow & \mathbf{1.5381} & \rightarrow & 1.5405 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_4 = 1.30 & \mathbf{1.9709} & \rightarrow & 1.5676 & \rightarrow & 1.5458 & \rightarrow & 1.5439 & \rightarrow & \mathbf{1.5433} & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_5 = 1.70 & 2.8283 & \rightarrow & 1.3279 & \rightarrow & 1.5376 & \rightarrow & \mathbf{1.5424} & \rightarrow & 1.5431 & \rightarrow & 1.5432
\end{array}
$$

(2)

Für das Polynom zweiten Grades (p_2) müssen drei Stützstellen gewählt werden. Da wir keine Informationen über die Funktion f und ihre Ableitung haben, können wir die zugehörige Fehlerabschätzung nur minimieren, indem wir das Knotenpolynom minimieren. Dies ist für die Stelle $x = 1.0$ bei der Wahl (0.5, 0.9, 1.3) der Fall. Der gesuchte Näherungswert ist also $p_2(1.0) = P_{4,2} = 1.5458$. **(1)**

b) Die Fehlerabschätzung lautet

$$|f(1.0) - P_{4,2}| \leq \frac{1}{3!} \max_{x\in[0.5,1.3]} |f'''(x)| \cdot |(1.0-0.5)\,(1.0-0.9)\,(1.0-1.3)| = \frac{1}{400} \max_{x\in[0.5,1.3]} |f'''(x)|.$$

Es gilt $f(x) = f''(x) = f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ und $f'(x) = f'''(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$. Da $f^{(4)}(x) > 0$ für alle $x \in [0.5, 1.3]$, ist $f^{(3)}$ in dem Intervall streng monoton steigend und somit

$$\max_{x\in[0.5,1.3]} |f'''(x)| = \max\{|f'''(0.5)|, |f'''(1.3)|\} = \max\{0.5210953, 1.698382437\} = 1.6984.$$

Es folgt

$$|f(1.0) - P_{4,2}| \leq \frac{1}{400} \cdot 1.6984 = 4.2460 \cdot 10^{-3} \left(< 4.25 \cdot 10^{-3}\right). \quad \left(= 4.245956093 \cdot 10^{-3}, \text{bei höherer Genauigkeit}\right)$$

(2)

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gegeben sei die Quadraturformel

$$Q(f) = w\,f\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + w\,f\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)\ ,$$

mit $w \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}$, die näherungsweise das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ berechnet.

a) Leiten Sie die Werte für w und α so her, dass die Quadraturformel mindestens den Exaktheitsgrad 3 hat.

Wir betrachten nun die summierte Gaußformel mit zwei Stützstellen:

b) Bestimmen Sie für diese Formel eine geeignete Anzahl an Teilintervallen n, so dass der Quadraturfehler für das Integral $\displaystyle\int_0^1 e^{\sin(x)}\,dx$ unter $\varepsilon = 10^{-3}$ bleibt.
Hinweis: Für $f(x) = e^{\sin(x)}$ gilt $\max_{\xi\in\mathbb{R}} |f^{(i)}(\xi)| \le 3\,i\,e$ für $i = 1, 2, \ldots, 5$.

a) Um einen möglichst hohen Exaktheitsgrad zu erreichen, testen wir die Quadraturformel für Monome bis zum Grad k mit möglichst hohem Grad. Zuerst verlangen wir, dass die Quadraturformel für die Monome $1, x, x^2$ exakt ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 1\,dx &= 1 \overset{!}{=} Q(1) = w + w \qquad \to w = \frac{1}{2}\\
\int_0^1 x\,dx &= \frac{1}{2} \overset{!}{=} Q(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\,dx &= \frac{1}{3} \overset{!}{=} Q(x^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \alpha\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \alpha + \alpha^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \alpha + \alpha^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 2\alpha^2\right) \to \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{12}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{6}\ .
\end{aligned}$$

Wir wählen also $w = \frac{1}{2} = 0.5$ und $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 0.28868$ (bzw. $\alpha = \frac{1}{-2\sqrt{3}} = -0.28868$ führt zur gleichen Formel). **(2)**

Die Formel integriert auch Polynome bis zum Grad 3 exakt, denn es gilt

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4} = Q(x^3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{4}. \qquad \textbf{(1)}$$

b) Für die summierte Gaußformel wird aus der Fehlerdarstellung für das Intervall $[a, b]$ (Formelsammlung)

$$|Q_m(f) - I(f)| = \frac{((m+1)!)^4}{((2m+2)!)^3(2m+3)} h^{2m+3} |f^{(2m+2)}(\xi)| \left(\text{ oder gleich für } m = 1\ :\ \frac{b-a}{4320}\,h^4\,|f^{(4)}(\xi)|\right)$$

mit $\xi \in [a, b]$ und $m = 1$ unter Anwendung des Hinweises $\left(f^{(4)}_{max} := 3 \cdot 4 \cdot e \ge \max_{\xi\in[0,1]} |f^{(4)}(\xi)|\right)$:

$$\begin{aligned}
|Q_1^{\mathbf{n}}(f) - I(f)| &\le \mathbf{n}\frac{((1+1)!)^4}{((2\cdot 1 + 2)!)^3(2\cdot 1 + 3)} h^{2\cdot 1+3} f^{(4)}_{max}\\
&= n\frac{2^4}{24^3 \cdot 5} h^5 f^{(4)}_{max}\\
&= \frac{1}{n^4}\frac{(b-a)^5}{4320} f^{(4)}_{max} \overset{!}{\le} \epsilon.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für n

$$n \ge \sqrt[4]{\frac{1}{4320\epsilon} f^{(4)}_{max}} = \sqrt[4]{\frac{12\,e}{4320 \cdot 0.001}} \approx 1.65767 \quad (1.6\ldots).$$

Also werden $n = 2$ Teilintervalle benötigt, um die gewünschte Genauigkeit garantieren zu können. **(2)**