Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. Falls nicht anders gefordert, muss das Ergebnis als Dezimalzahl angegeben werden.

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	Es gilt $\lvert\text{fl}(x + y)\rvert \le \lvert\text{fl}(x)\rvert + \lvert\text{fl}(y)\rvert$ für alle $x, y \in \mathbb{D}$.	falsch
2.	In $\mathbb{M}(2, 4, -4, 4)$ gilt $x_{\text{MIN}} = \frac{1}{32}$.	wahr
3.	Es gilt $\lvert\text{fl}(x) - x\rvert \le \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	falsch
4.	Die Anzahl der Elemente in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ hängt nicht von m ab.	falsch
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 23 in $\mathbb{M}(7, 6, -8, 8)$ an.	**32**
6.	Die Funktion $f(x) = x \sin(x)$ ist gut konditioniert für $x = \frac{1}{2}\pi$.	wahr
7.	Falls die Kondition eines Problems gut ist, sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems automatisch stabil.	falsch
8.	Es seien $x = 3$ und $y = 3 + 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $e^x - e^y$ tritt Auslöschung auf.	wahr
9.	Wir betrachten die Berechnung einer Summe $S_m := \sum_{j=1}^{m} x_j$. Die Stabilität dieser Summenbildung hängt von der Reihenfolge der Summanden x_j ab.	wahr
10.	Berechnen Sie die relative Konditionszahl der Funktion $f(x_1, x_2) = x_2 e^{x_1}$ für $(x_1, x_2) = (-2, 0)$.	**2**

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.

1.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $B\,x^* = b$.	falsch
2.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\kappa_\infty(B) \le \kappa_\infty(A)$, wobei $\kappa_\infty(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. der Maximumnorm ist.	wahr
3.	Es seien $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung x^* und $r := b - A\,\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Es gilt $\frac{\lVert r\rVert}{\lVert b\rVert} \le \lVert A\rVert \frac{\lVert x^* - \tilde{x}\rVert}{\lVert x^*\rVert}$.	falsch
4.	Es existiert immer eine $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A.	falsch
5.	Es seien $\kappa_\infty(A)$ die Konditionszahl bzgl. der Maximumnorm und $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\kappa_\infty(A)$.	**10**
6.	Es sei $A = Q\,R$ eine $Q\,R$-Zerlegung von A. Dann gilt $R\,x^* = Q^T b$.	wahr
7.	Es sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung y von $R\,y = b$ über Rückwärtseinsetzen beträgt etwa $\frac{1}{2}n$ Operationen.	falsch
8.	Pivotisierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination.	wahr
9.	Falls die Matrix A orthogonal ist, gilt $\kappa_2(A) = 1$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. der euklidischen Norm ist.	wahr
10.	Es seien $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechnen Sie $\lVert D\rVert_2$.	**0.25**

VF-3:		
1.	Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ existiert eine Cholesky-Zerlegung.	falsch
2.	Es sei $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung der positiv definiten Matrix A. Dann ist $A^{-1} = L^{-T}D^{-1}L^{-1}$ die Cholesky-Zerlegung der Matrix A^{-1}.	falsch
3.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten $n \times n$-Matrix über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen (gem. Vorlesung).	wahr
4.	Für jede orthogonale Matrix Q gilt $Q^T = Q$.	falsch
5.	Es sei $A = L\,D\,L^T$ mit $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix}$. Geben Sie $\det(A^2)$ an.	**25**
6.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Es gilt: $Q_v^{-1} = Q_v$.	wahr
7.	Das Produkt zweier Householder-Transformationen ist eine Spiegelung.	falsch
8.	Das Produkt zweier Givens-Transformationen ist eine Rotation.	wahr
9.	Eine $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert nur dann, wenn die Matrix A den vollen Spaltenrang n hat.	falsch
10.	Es seien $v, x \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$, $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Geben Sie $\|Q_v x\|_2^2$ an.	**5**

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ferner seien $x^* = \text{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ die eindeutige Minimalstelle und $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b. Ebenso sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(\hat{x})\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.

1.	Je kleiner der Winkel Θ, desto besser ist die Kondition des linearen Ausgleichsproblems.	wahr
2.	Je kleiner der Winkel Θ, desto besser ist die Stabilität des Lösungsverfahrens über die QR-Zerlegung.	falsch
3.	Es gilt $\tilde{R}\,x^* = Q\,b$.	falsch
4.	Es gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(\tilde{R})$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. der euklidischen Norm ist.	wahr
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|A\,x^* - b\|_2$.	**0**
6.	Es sei $L\,D\,L^T = A^TA$ die Cholesky-Zerlegung von A^TA. Dann gilt $x^* = L^{-T}D^{-1}L^{-1}A^Tb$.	wahr
7.	Die Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems kann man als Fixpunktiteration darstellen.	wahr
8.	Bei der Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist die Konvergenzordnung in der Regel zwei.	falsch
9.	Eine geeignete Wahl des skalaren Parameters μ im Levenberg-Marquardt-Verfahren kann den Einzugsbereich der Methode erweitern.	wahr
10.	Es seien $m = 3$, $n = 1$ und $Q\,b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|A\,x^* - b\|_2$.	**5**

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \dots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.

1.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration mindestens 2.	wahr
2.	Falls $\|\Phi'(x^*)\|_2 > 1$, ist die Fixpunktiteration nicht lokal konvergent.	falsch
3.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0, 1]$ erfüllt.	falsch
4.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$. Die Fixpunktiteration konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.	wahr
5.	Es sei $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}$. Wir betrachten das Sekantenverfahren zur Annährung einer Nullstelle dieser Funktion, mit Startwerten $x_0 = -2$, $x_1 = 0$. Berechnen Sie x_2.	**-1**
6.	Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Weiter sei Φ so, dass $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ dem Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle x^* entspricht. Es gilt $\Phi'(x^*) = 0$.	wahr
7.	Es sei $f(x) = x^3 - 7$. Die Bisektionsmethode zur Bestimmung der Nullstelle von f konvergiert für beliebige Startwerte $x_0 \in (-\infty, 1]$, $x_1 \in [2, \infty)$.	wahr
8.	Die Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren, stetigen Funktion f konvergiert nur dann, wenn die Startwerte x_0 und x_1 dieser Methode so gewählt werden, dass $f(x_0)f(x_1) < 0$ gilt.	falsch
9.	Es sei $f(x) = x^2 - 2$. Das auf f angewandte Newton Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq 0$, gegen die Nullstelle $x^* > 0$ dieser Funktion.	falsch
10.	Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von x^* und es gelte $f(x^*) = 0$, $\det(f'(x^*)) \neq 0$. Sei x_0 ein Startwert aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* und x_k, $k \geq 1$, die mit dem Newton-Verfahren berechnete Folge. Geben Sie den Wert für p so an, dass $\|x^* - x_k\|_\infty \approx \|x_{k+1} - x_k\|_\infty^p$ für k hinreichend groß gilt.	**1**

VF-6: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ interpoliert. Weiter seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Es gilt $P(Q \mid x_0, \dots, x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n.	wahr
2.	Es gilt $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x) = P(f \mid x_{n-1}, \dots, x_0)(x) + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})[x_0, \dots, x_n]f$.	wahr
3.	Es sei $\ell_{jn}(x) = \Pi_{k=0,k\neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$, $0 \leq j \leq n$. Es gilt $P(f\|x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n \ell_{jn}(x)[x_0, \dots, x_j]f$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	falsch
4.	Es gilt $\delta_n = [x_0, \dots, x_n]f$.	wahr
5.	Es seien $f(x) = 3x^2$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$. Berechnen Sie δ_2.	**3**

Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \dots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.

6.	Es seien $I_m^{NC}(f)$ und $I_m^G(f)$ die Newton-Cotes-Formel und die Formel der Gauß-Quadratur. Für $m \geq 1$ gilt, dass der Exaktheitsgrad von $I_m^{NC}(f)$ strikt kleiner ist als der von $I_m^G(f)$.	wahr
7.	Der Exaktheitsgrad der summierten Quadraturformel $I_m^n(f)$ ist größer als der von $I_m(f)$.	falsch
8.	Es sei $P(f \mid x_0, \dots, x_m)$ das Lagrange–Interpolationspolynom. Bei der Gauß-Quadratur gilt $I_m(f) = \int_a^b P(f \mid x_0, \dots, x_m)(x)\,dx$.	wahr
9.	Es sei $I_1(f)$ die Trapezregel. Es gilt $\|I_1^n(f) - I(f)\| \to 0$ für $n \to \infty$.	wahr
10.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^1 6\,x^4\,dx$ mit Hilfe der Simpsonregel.	**1.25**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -9 & 3 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie L, R und P explizit an.

Es seien nun

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2 \\ 3.5 & 5.25 & 7.75 \\ 0 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ die Matrizen der LR-Zerlegung von $\tilde{P}DB$, d.h. $\tilde{P}DB = \tilde{L}\tilde{R}$.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Bx = b$ mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

c) Wir nehmen nun an, dass die rechte Seite b und die Matrix B nur in gestörter Form vorliegen. Dabei wissen wir, dass der abolute Fehler $\|\Delta b\|_\infty$ mit $2.5 \cdot 10^{-4}$ nach oben beschränkt werden kann. Wie groß darf die Störung in B, gemessen in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm, höchstens sein, damit der relative Fehler in x, ebenfalls gemessen in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm, nicht größer als zwei Prozent ist? Dabei darf verwendet werden, dass $\|B^{-1}\|_\infty = 11$ ist.

a)

LR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -9 & 3 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1\leftrightarrow 2} \begin{pmatrix} -9 & 3 & 6 \\ -\frac{1}{3} & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2\leftrightarrow 3} \begin{pmatrix} -9 & 3 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

also

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.33333 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 6 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

b) Es gilt

$$B\,x = b \Leftrightarrow \tilde{L}\,\tilde{R}\,x = \tilde{P}Db.$$

Substituiere $\tilde{R}x = y$ und löse $\tilde{L}y = \tilde{P}Db$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Mache im Anschluss die Substitution rückgängig:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

c) Für $\kappa(B)\frac{\|\Delta B\|_\infty}{\|B\|_\infty} < 1$ und $(B+\Delta B)(x+\Delta x) = b + \Delta b$ gilt die Ungleichung

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \frac{\kappa(B)}{1-\kappa(B)\frac{\|\Delta B\|_\infty}{\|B\|_\infty}} \left(\frac{\|\Delta B\|_\infty}{\|B\|_\infty} + \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} \right).$$

Mit $\|B\|_\infty = 16.5$ und $\|b\|_\infty = 2.5$ haben wir

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le \frac{181.5}{1-11\|\Delta B\|_\infty} \left(\frac{\|\Delta B\|_\infty}{16.5} + 10^{-4} \right) \overset{!}{\le} 0.02.$$

Aufgelöst nach $\|\Delta B\|_\infty$ ergibt dies

$$\|\Delta B\|_\infty \le 1.6934 \cdot 10^{-4},$$

was insbesondere auch kleiner als $\frac{\|B\|_\infty}{\kappa(B)} = \frac{1}{11}$ ist. **(2)**

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Die Funktion $y(t) := a\sin(t) + \tan(bt) - t$ soll im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimal an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
y_i	2	4	3

Bestimmen Sie die Parameter a und b näherungsweise:

a) Formulieren Sie dazu das entsprechende nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$. Geben Sie F und x explizit an.

b) Für das Gauß-Newton-Verfahren ist der Startwert $(a^0, b^0) = (0, 0)$ gegeben. Stellen Sie das zugehörige linearisierte Ausgleichsproblem für den ersten Schritt auf.

Wir betrachten nun das lineare Ausgleichsproblem

$$\left\| \begin{pmatrix} -8 & 20 \\ 0 & 8 \\ -6 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{(c,d)^T \in \mathbb{R}^2} .$$

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit dem Householder-Verfahren und geben Sie die Norm des Residuums an.

Teil a) Die i-te Zeile der zu minimierenden Funktion $F(x) = F(a,b)$ lautet

$$F_i(x) := y(t_i) - y_i = a\sin(t_i) + \tan(bt_i) - t_i - y_i \ .$$

Gesucht ist somit x^* mit $||F(x^*)||_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^2} ||F(x)||_2$ mit $x = (a, b)$ und

$$F(x) = F(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} + \tan(\frac{\pi b}{4}) - \frac{\pi}{4} - 2 \\ \frac{\sqrt{3}a}{2} + \tan(\frac{\pi b}{3}) - \frac{\pi}{3} - 4 \\ a + \tan(\frac{\pi b}{2}) - \frac{\pi}{2} - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.70711\,a + \tan(0.7854\,b) - 2.7854 \\ 0.86603\,a + \tan(1.0472\,b) - 5.0472 \\ a + \tan(1.5708\,b) - 4.5708 \end{pmatrix} . \qquad \textbf{(1)}$$

Teil b) Aufgestellt werden soll

$$\left\| F(x^0) + F'(x^0)\Delta x^0 \right\|_2 \to \min_{\Delta x^0 = (\Delta a^0, \Delta b^0)^T \in \mathbb{R}^2}$$

Hier ist

$$F_i'(x) = \begin{pmatrix} \sin(t_i) & \dfrac{t_i}{\cos^2(bt_i)} \end{pmatrix} .$$

Damit ergibt sich

$$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4} - 2 \\ -\frac{\pi}{3} - 4 \\ -\frac{\pi}{2} - 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\pi}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\pi}{3} \\ 1 & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a^0 \\ \Delta b^0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -2.7854 \\ -5.0472 \\ -4.5708 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.70711 & 0.7854 \\ 0.86602 & 1.0472 \\ 1 & 1.5708 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a^0 \\ \Delta b^0 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{(\Delta a^0, \Delta b^0)^T \in \mathbb{R}^2} . \qquad \textbf{(2)}$$

Teil c) Wir definieren

$$A := \begin{pmatrix} -8 & 20 \\ 0 & 8 \\ -6 & 15 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} .$$

Da b eine Spalte der Matrix A ist, wissen wir bereits, dass die Lösung $(c,d)^T = (0,1)^T$ ist und das Residuum $r = 0$ ist. Löse das lineare Ausgleichsproblem mit Householder:

Householder-Tableau:

			-8	20	20	
			0	8	8	
			-6	15	15	$\alpha_1 = -10$
-18	0	-6	(180)	-450	-450	$\beta_1 = 1/180$
		$-18/180$	10	-25	-25	$c = 0$
		0	0	8	8	$d = 1$
		$-6/180$	0	0	0	$res = 0$

(2)

Rückwärtseinsetzen (eigentlich schon im Tableau)

$$\Rightarrow d = \frac{8}{8} = 1 \qquad \Rightarrow \quad c = \frac{-25+25}{10} = 0$$

Das Residuum ist $r := \|Ax - b\|_2 = 0$. **(1)**

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(x-1)^2}{6} + \dfrac{(y-1)^2}{6} + \dfrac{x\,y}{18} \\ \dfrac{x-y+2}{2} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y)\ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0,2] \times [0,2]$ erfüllt sind.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x^0, y^0) := (0,\ 0)$ zwei Fixpunktschritte durch, d. h. berechnen Sie (x^2, y^2).

Hinweis: Sollten Sie in a) keine Kontraktionszahl L gefunden haben, verwenden Sie im Folgenden die 1-Norm und $L = \dfrac{e}{\pi}$.

c) Geben Sie eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für (x^2, y^2) an.

d) Wie viele Iterationsschritte/Fixpunktschritte sind ausgehend vom Startwert $(x^0, y^0) := (0,\ 0)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt bis auf einen Fehler von $\varepsilon = 2.4 \cdot 10^{-3}$ anzunähern? Geben Sie einen möglichst kleinen Wert an.

zu a)

i) E ist abgeschlossen und beschränkt, also vollständig.

ii) **Selbstabbildung:** Wegen $(x,y) \in [0,2]^2$ gilt $\frac{(x-1)^2}{6}$, $\frac{(y-1)^2}{6} \in [0, \frac{1}{6}]$ und $\frac{x\,y}{18} \in [0, \frac{4}{18}]$ sowie $x - y \in [-2, 2]$. Daraus folgt

$$\begin{array}{rcccccl} 0 = & 0+0+0 & \le & \frac{(x-1)^2}{6} + \frac{(y-1)^2}{6} + \frac{x\,y}{18} & \le & \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9} & \le 2 \\ 0 = & \frac{-2+2}{2} & \le & \frac{x-y+2}{2} & \le & \frac{2+2}{2} & = 2 \end{array}$$

Insgesamt gilt also $F(E) \subset \left[0, \frac{5}{9}\right] \times [0,2] \subset E \Rightarrow F$ ist selbstabbildend auf E.

iii) **Kontraktivität:** Da E konvex ist und F stetig differenzierbar ist, dürfen wir zum Nachweis der Kontraktion die Ableitung benutzen. Als Jacobi-Matrix ergibt sich

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{(x-1)}{3} + \frac{y}{18} & \frac{(y-1)}{3} + \frac{x}{18} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir schätzen die Matrixkomponenten betragsmäßig nach oben ab. Wegen $(x,y) \in E = [0,2]^2$ gilt $\frac{(x-1)}{3}$, $\frac{(y-1)}{3} \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Also ergibt sich auf E die elementweise Betragsabschätzung (zulässig in der $\|\cdot\|_1$- und $\|\cdot\|_\infty$-Norm, nicht jedoch in der $\|\cdot\|_2$-Norm):

$$\|F'(x,y)\|_1 \le \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{9} & \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\|_1 = \frac{17}{18}.$$

(Hier können wir die ∞-Norm **nicht** verwenden – zu groß).

F ist also kontraktiv auf E.

Somit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. **(4)**

zu b)

Startwert: $\mathbf{x}^0 := \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1\. Schritt: $\mathbf{x}^1 := \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33333 \\ 1 \end{pmatrix}$

2\. Schritt: $\mathbf{x}^2 := \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{54} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0925926 \\ 0.666667 \end{pmatrix}$ und für c) $\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -0.240741 \\ -0.333333 \end{pmatrix}$

(1)

zu c) Es ist $\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|_1 = \frac{31}{54} = 0.574074$ und somit gemäß a-posteriori-Abschätzung

$$\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^*\|_1 \le \frac{L}{1-L} \|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|_1 = \frac{\frac{17}{18}}{\frac{1}{18}} \frac{31}{54} = 17\,\frac{31}{54} = \frac{527}{54} = 9.75926\ (< 10) \qquad (3.686404949)\ .$$

(1)

zu d) Es gilt gemäß a-priori-Abschätzung

$$\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^*\|_1 \leq \frac{L^n}{1-L}\,\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|_1 \overset{!}{\leq} \varepsilon \Longleftrightarrow$$

$$n \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{\|\mathbf{x}^1-\mathbf{x}^0\|}}{\ln L} = \frac{\ln\left(\frac{24\cdot 10^{-4}\cdot\frac{1}{18}}{\frac{4}{3}}\right)}{\ln\left(\frac{17}{18}\right)} = \frac{\ln\left(10^{-4}\right)}{\ln(17)-\ln(18)} = 161.1\ldots \qquad (57.51643480) \quad .$$

Es sind also höchstens $n = 162$ Schritte erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 2.4 \cdot 10^{-3}$ zu erreichen. **(2)**

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zur Berechnung der Funktion $f(x) = \cos(x)$ steht die folgende Tabelle zur Verfügung

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$\sin(x)$	0	0.2474	0.4794	0.6816	0.8415
$\cos(x)$	1	0.9689	0.8776	0.7317	0.5403

Die Funktion soll durch ein Polynom p zweiten Grades angenähert werden.

a) Zeigen Sie, ohne das Polynom p zu bestimmen und der ausschließlichen Verwendung von Tabellenwerten für Sinus- und Kosinuswerte, dass die Stützstellen so gewählt werden können, dass für den Interpolationsfehler in $x = 0.1$ gilt:

$$|f(0.1) - p(0.1)| \leq 2.2 \cdot 10^{-4}.$$

Hinweis: Verwenden Sie $\cos(x) = \cos(-x)$.

b) Bestimmen Sie nun das Polynom p zu den in a) bestimmten Stützstellen in Newton-Darstellung. Sollten Sie keine Stützstellen bestimmt haben, verwenden sie $x_0 = 0, x_1 = 0.25$ und $x_2 = 0.5$.
Werten Sie dann die Newton-Darstellung mit dem Horner-Schema an der Stelle $x = 0.1$ aus.

zu a)

Zur Wahl der Stützstellen wird vorab die Fehlerabschätzung betrachtet:

Mit $a = \min\{x_0, x_1, x_2, 0.1\}$, $b = \max\{x_0, x_1, x_2, 0.1\}$ gilt

$$|f(0.1) - p(0.1)| \leq \frac{1}{3!} \max_{x \in [a,b]} |\sin(x)||(0.1 - x_0)(0.1 - x_1)(0.1 - x_2)|.$$

Da $\cos(x) = \cos(-x)$ werden die Stützstellen $-0.25,\ 0,\ 0.25$ gewählt. Dadurch wird sowohl der Anteil durch das Knotenpolynom als auch der in Frage kommende Sinuswert optimal klein:

$$|f(0.1) - p(0.1)| \leq \frac{1}{6} \cdot 0.2474 \cdot 0.35 \cdot 0.1 \cdot 0.15 \leq 2.2 \cdot 10^{-4}.$$

(2)

zu b)

Newton-Tableau

x_i			
-0.25	0.9689		
		> 0.1244	
0	1		> -0.4976
		> -0.1244	
0.25	0.9689		> -0.4816
		> -0.3652	
0.5	0.8776		

Daraus folgt $p(x) = 0.9689 + 0.1244(x + 0.25) - 0.4976x(x + 0.25)$.

Auswertung:

Es gilt $p(x) = 0.9689 + (x + 0.25) \cdot (0.1244 - x \cdot 0.4976)$.

Hornerartige Auswertung ergibt: $p(0.1) = 0.9689 + (0.1 + 0.25) \cdot (0.1244 - 0.1 \cdot 0.4976) = 0.99502$. **(3)**

Alternativ: $p(x) = 1 - 0.1244x - 0.4816x(x - 0.25) = 1 + x \cdot (-0.1244 - 0.4816(x - 0.25))$.

Hornerartige Auswertung ergibt: $p(0.1) = 1 + 0.1 \cdot (-0.1244 - 0.4816(0.1 - 0.25)) = 0.99478$.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gegeben sei die Quadraturformel

$$Q(f) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{2}{3}\right) ,$$

die näherungsweise das Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ bestimmt.

a) Zeigen Sie, dass der Exaktheitsgrad der Quadraturformel kleiner 2 ist.

b) Es sei $a > 0$ gegeben. Nutzen Sie die Quadraturformel um $f(x) := \dfrac{2}{9x^2+1}$ auf dem Intervall $[0, a]$ näherungsweise zu integrieren.

c) Das Intervall $[0, 1]$ wird in n Teilintervalle der Länge $h = \frac{1}{n}$ unterteilt, $t_k = hk$, $k = 0, \ldots, n$. Geben Sie die entsprechende summierte Quadraturformel Q_n an.
Hinweis: Wie lautet die Quadraturformel Q angepasst auf das Teilintervall $[t_k, t_{k+1}]$?

zu a)

Für einen Exaktheitsgrad von 2 (oder höher) muss die Bedingung $Q(x^2) \overset{!}{=} \int_0^1 x^2\,dx$ erfüllt sein. Es gilt

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \neq \frac{5}{18} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = Q(x^2).$$

Somit kann die Quadraturformel nur einen Exaktheitsgrad kleiner 2 haben. **(1)**

zu b)

Die lineare Transformation von $[0, 1]$ auf $[0, a]$ ist lediglich eine Streckung. Auf dem Intervall $[0, a]$ lautet die Formel:

$$Q_{[0,a]}(f) = a\left(\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}a\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{2}{3}a\right)\right).$$

Für das Integral erhalten wir somit

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a \frac{2}{9x^2+1}\,dx \approx \frac{a}{2}\left(\frac{2}{9(a/3)^2+1} + \frac{2}{9(2a/3)^2+1}\right) = \frac{a}{a^2+1} + \frac{a}{4a^2+1}.$$

(2)

zu c)

Auf jedem Teilintervall $[t_k, t_{k+1}]$ lautet die Formel:

$$Q_{[t_k,t_{k+1}]}(f) = h\left(\frac{1}{2} f\left(t_k + \frac{1}{3}h\right) + \frac{1}{2} f\left(t_k + \frac{2}{3}h\right)\right).$$

Für die summierte Formel ergibt sich somit ($t_k = hk$, $k = 0, \ldots, n$)

$$\begin{aligned} Q_n(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{1}{2} f\left(t_i + \frac{1}{3}h\right) + \frac{1}{2} f\left(t_i + \frac{2}{3}h\right)\right) \\ &= \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\left(i + \frac{1}{3}\right)h\right) + f\left(\left(i + \frac{2}{3}\right)h\right). \end{aligned}$$

(2)