Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. Falls nicht anders gefordert, muss das Ergebnis als Dezimalzahl angegeben werden.

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung, und es sei $\ominus$ (gem. Vorlesung/Buch) der Minusoperator für $\mathbb{M}$, d.h.: $x \ominus y := \text{fl}(\text{fl}(x) - \text{fl}(y))$ wobei wir hier annehmen, dass alle Zwischenergebnisse in $\mathbb{D}$ liegen.		
1.	Es gilt $x_{\text{MAX}} = (1 - b^{-m})b^R$.	wahr
2.	In $\mathbb{M}(2, 4, -4, 4)$ gilt $x_{\text{MIN}} = \frac{1}{31}$.	falsch
3.	Die Anzahl der Maschinenzahlen in $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ ist endlich.	wahr
4.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $\|\epsilon\| \leq$ eps und $\text{fl}(x) - x = \epsilon$.	falsch
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 17 in $\mathbb{M}(3, 8, -8, 8)$ an.	**122**
6.	Es gilt $\frac{\|(x \ominus y)-(x-y)\|}{\|x-y\|} \leq$ eps für alle $x, y \in \mathbb{M}(b, m, r, R)$ mit $x \neq y$.	wahr
7.	Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, wird jede Störung der Eingabedaten viel verstärkt.	falsch
8.	Es seien $x = 5$ und $y = 5 - 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $\sin(x) - \sin(y)$ tritt Auslöschung auf.	wahr
9.	Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist gut konditioniert für alle $x \geq 3$.	wahr
10.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x, y)$ der Funktion $f(x, y) = x^2 \cos(y)$ im Punkt $(1, 0)$.	**2**

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\kappa_2(B) \leq \kappa_2(A)$, mit $\kappa_2(A) := \\|A\\|_2 \\|A^{-1}\\|_2$.	falsch
2.	Wir betrachten das gestörte Problem $A\,\tilde{x} = \tilde{b}$. Es gilt $\frac{\\|b-\tilde{b}\\|}{\\|b\\|} \leq \kappa(A) \frac{\\|x^*-\tilde{x}\\|}{\\|x^*\\|}$, mit $\kappa(A) := \\|A\\| \\|A^{-1}\\|$.	wahr
3.	Für die Konditionszahl der Matrix A gilt $\kappa(A^2) = \kappa(A)^2$.	falsch
4.	Es sei $P\,A = L\,R$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt: $\det(A) = \det(R)$.	falsch
5.	Berechnen Sie $\\|A\\|_1$ für $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.	**9**
6.	Eine LR-Zerlegung $P\,A = L\,R$ kann man verwenden, um A^{-1} zu bestimmen.	wahr
7.	Es sei $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung y von $Ry = b$ über Rückwärtseinsetzen beträgt etwa n^2 Operationen gem. Vorlesung.	falsch
8.	Es sei A symmetrisch positiv definit. Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Zerlegung $A = L\,D\,L^T$ is eine stabiles Verfahren.	wahr
9.	Es sei A symmetrisch positiv definit. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen gem. Vorlesung.	wahr
10.	Es seien $\kappa_\infty(A)$ die Konditionszahl bzgl. der Maximumnorm und $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\kappa_\infty(A)$.	**15**

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = Q\,R$ eine QR-Zerlegung von A.		
1.	Es existiert immer eine $Q\,R$-Zerlegung von A.	wahr
2.	Für jede orthogonale Matrix gilt Q gilt $Q^T = Q$.	falsch
3.	Es seien $m = n$ und $\det(A) \neq 0$. Dann gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(Q)$, wobei $\kappa_2(.)$ ie Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.	falsch
4.	Es seien $m = n$, $\det(A) \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: $A\,x = b \Leftrightarrow x = R^{-1}Q^T b$.	wahr
5.	Es seien $v, x \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Geben Sie $\|Q_v x\|_2$ an.	**6**
6.	Die Householder-Methode zur Bestimmung der QR-Zerlegung ist immer stabil.	wahr
7.	Die Summe zweier orthogonaler $m \times m$ - Matrizen ist eine orthogonale Matrix.	falsch
8.	Es seien Q_v die $m \times m$ - Householder-Transformation bezüglich v und $x \in \mathbb{R}^m$ beliebig. Dann gilt $\|Q_v x\|_\infty = \|x\|_\infty$.	falsch
9.	Das Produkt zweier Givens-Transformationen ist eine orthogonale Matrix.	wahr
10.	Es sei Q_v eine Householder-Transformation. Geben Sie den Wert des größten Eigenwertes der Matrix Q_v an.	**1**

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\mathrm{Rang}(A) = n \leq m$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$ gilt. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ und $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b. Ebenso sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Dazu betrachten wir das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(\hat{x})\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.		
1.	Die Matrix $A^T A$ ist symmetrisch positiv definit.	wahr
2.	Es gilt $x^* = \mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2 \Leftrightarrow Q\,A\,x^* = Q\,b$.	falsch
3.	Je kleiner der Winkel Θ, desto besser ist die Stabilität des Lösungsverfahrens über die QR-Zerlegung.	falsch
4.	Es sei $Q\,b =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $x^* = R^{-1}b_1$.	wahr
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie Θ.	**0**
6.	Die Matrix R kann man über Householder-Transformationen bestimmen.	wahr
7.	Die Gauß-Newton Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\hat{x}$.	falsch
8.	Mit einer geeigneten Wahl des im Levenberg-Marquardt-Verfahren verwendeten Parameters kann man die Konvergenzordnung der Methode vergrößern.	falsch
9.	Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton-Methode ist in der Regel 1.	wahr
10.	Es seien $m = 4$, $n = 2$ und $Q\,b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|Ax^* - b\|_2$.	**4**

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung (Jacobi-Matrix) von Φ an der Stelle x. Weiterhin sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Für das Intervall $[a, b]$ gilt, dass $a < x^* < b$, wobei x^* die einzige Nullstelle von f in $[a, b]$ ist.		
1.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\\|x_0 - x^*\\|$ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.	wahr
2.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist höchstens 2.	falsch
3.	Das Gauss-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.	wahr
4.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$. Die Fixpunktiteration konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.	wahr
5.	Es sei x_0 ein Startwert aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* und x_k, $k \geq 1$, die mit dem Newton-Verfahren berechnete Folge: $x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$. Geben Sie den Wert für p an, sodass $x^* - x_k \approx (x_{k+1} - x_k)^p$ für k hinreichend groß gilt.	**1**
6.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) := 2e^{-\frac{1}{2}x}$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ erfüllt.	falsch
7.	Das Bisektionsverfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von f konvergiert, wenn man die Startwerte $x_0 = a$ und $x_1 = b$ wählt.	wahr
8.	Sei f konvex auf $[a, \infty)$, d.h. $f''(x) > 0$ für alle $x \geq a$. Dann gilt: Das Newton-Verfahren konvergiert gegen x^* für jeden Startwert $x_0 \geq a$.	falsch
9.	Es seien $\Phi(x) = x - f(x)$ und x^* die Nullstelle von f in $[a, b]$. Dann gilt $\Phi'(x^*) = 0$.	falsch
10.	Es seien $[a, b] = [0, 2]$ und $f(x) = x^3 - 1$. Wir betrachten das Sekantenverfahren zur Annährung einer Nullstelle dieser Funktion, mit Startwerten $x_0 = 0$, $x_1 = 2$. Berechnen Sie x_2.	**0.25**

VF-6: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f\|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ interpoliert. Weiter seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt: $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x) + \delta_n \Pi_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	wahr
2.	Es sei $\ell_{jn}(x) = \Pi_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$, $0 \leq j \leq n$. Es gilt $P(f\|x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x)\ell_{jn}(x_j)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.	falsch
3.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \|P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\|$ ist minimal wenn man die Stützstellen x_i äquidistant wählt.	falsch
4.	Es sei f ein Polynom vom Grad maximal n. Dann gilt: $f(x) = P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	wahr
5.	Es seien $f(x) = 4x^2 - 2$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Berechnen Sie δ_2.	**4**
Es sei $f \in C^\infty([a, b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden. Es sei $I_m(f) = (b - a)\sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ eine Quadraturformel mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.		
6.	Die Exaktheitsgrade der Quadraturformel $I_m(f)$ und der summierten Quadraturformel $I_m^n(f)$ sind gleich.	wahr
7.	Es gibt Stützstellen x_j, $0 \leq j \leq m$, sodass mit dem Lagrange–Interpolationspolynom $P(f \mid x_0, \ldots, x_m)$ bei der Gauß-Quadratur gilt: $I_m(f) = \int_a^b P(f \mid x_0, \ldots, x_m)(x)\,dx$.	wahr
8.	Bei der Gauß-Quadratur hängen die Stützstellen x_j, $0 \leq j \leq m$, von der Funktion f ab.	falsch
9.	Es sei m fest gewählt. Der Fehler $\|I_m(f) - I(f)\|$ ist bei einer Gauß-Quadraturformel immer kleiner als bei einer Newton-Cotes Formel.	falsch
10.	Berechnen Sie eine Approximation von $\int_1^3 x^3$ mit der summierten Trapezregel $I_1^2(f)$.	**22**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.4 & 0.4 \\ 0.4 & -0.3 & 0.3 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die $L\,R$-Zerlegung von A **mit Spaltenpivotisierung**, d. h. $P\,A = L\,R$, in **zweistelliger** Gleitpunktarithmetik (**Runden Sie nach jeder Rechenoperation!**).
Geben Sie die Matrizen P, L und R explizit an.

Es seien nun

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0.79 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 0.4 & 1 & 0.54 \\ 0 & 0.39 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.71 \\ 1.3 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ die Matrizen der LR-Zerlegung von B, d.h. $B = \tilde{L}\tilde{R}$.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Bx = b$ mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen in **zweistelliger** Gleitpunktarithmetik.

a) $L\,R$-Zerlegung:

$$A \overset{\text{Pivot(3,2,1)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.4 & -0.3 & 0.3 \\ 0.2 & -0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|cc} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ \hline 0.5 & -0.35 & 0.25 \\ 0.25 & -0.43 & 0.38 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{Pivot(3,1,2)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|cc} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ \hline 0.25 & -0.43 & 0.38 \\ 0.5 & -0.35 & 0.25 \end{array}\right) \overset{\text{Gauss}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ \hline 0.25 & -0.43 & 0.38 \\ 0.5 & 0.81 & -0.06 \end{array}\right)$$

$$\text{also:} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.81 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & -0.43 & 0.38 \\ 0 & 0 & -0.06 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(4)

b) Es gilt

$$B\,x = b \Leftrightarrow \tilde{L}\,\tilde{R}\,x = b.$$

Substituiere $\tilde{R}x = y$ und löse $\tilde{L}y = b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0.79 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.71 \\ 1.3 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.61 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mache im Anschluss die Substitution rückgängig:

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 1 & 0.54 \\ 0 & 0.39 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.61 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Gegeben sind die Punkte

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & -3 & -1 & 2 \\ \hline y_i & -5 & -6 & 4 \end{array},$$

die gemäß theoretischen Überlegungen auf der Kurve zu

$$y(x) = \alpha 2^{|x|} + \beta \frac{1}{2}(x^2 + x) + 2$$

liegen.

Zu bestimmen sind die optimalen Parameter α und β im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate.

a) Formulieren Sie dazu das entsprechende lineare Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$. Geben Sie A, x und b explizit an.

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}} \|Bx - c\|_2$ mit

$$B = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 29 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe von Householder-Transformationen. Wie groß ist das Residuum?
Hinweis: Givens-Rotationen oder der Ansatz über Normalengleichungen werden mit 0 Punkten bewertet.

c) Wie groß darf der absolute Fehler von c, gemessen in der $\|\cdot\|_2$-Norm, höchstens sein, damit der relative Fehler in x, ebenfalls gemessen in der $\|\cdot\|_2$-Norm, nicht größer als ein Prozent ist?

Teil a)

Die Zeilen des Ausgleichsproblems haben die Form

$$A_{i,\cdot} = \begin{pmatrix} 2^{|x_i|} & \frac{1}{2}(x^2 + x) \end{pmatrix}, \quad b_i = y_i - 2.$$

Gesucht ist also ein $x^* \in \mathbb{R}^2$ mit $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2$, $x = (\alpha, \beta)^T$ und

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1)

Teil b)

			-12	29	
			0	3	
			5	2	$\alpha_1 = -13$
-25	0	5	(325)	-715	$\beta_1 = 0.0030769$
		-0.076923	13	-26	-2
		0	0	3	
		0.015385	0	13	$res = 13.342$

Man findet also $x^* = -26/13 = -2$ und das Residuum $res = \sqrt{3^2 + 13^2} = \sqrt{178} = 13.342$. **(3)**

Teil c)

Die Formeln stehen in der Formelsammlung.

Hier ist $(0 \neq x \in \mathbb{R})$ $\|B\,x\|/\|x\| = |x|\,\|(-12,\,0,\,5)^T\|/|x| = \|(-12,\,0,\,5)^T\|$, also $\kappa_2(B) = 1$. Weiter ist $\|Bx^*\|_2 = 26$ und wir erhalten

$$\frac{\kappa_2(B)}{\cos(\Theta)} \frac{\|\tilde{c} - c\|_2}{\|c\|_2} = \frac{\kappa_2(B)}{\|Bx^*\|_2} \|\tilde{c} - c\|_2 = \frac{1}{26} \|\tilde{c} - c\|_2 \overset{!}{\leq} 0.01.$$

Also muss gelten

$$\|\tilde{c} - c\|_2 \leq 0.26.$$

(2)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} y^2 + 2\,y + x &= 4 \\ x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} &= \frac{33}{4} \end{aligned}$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

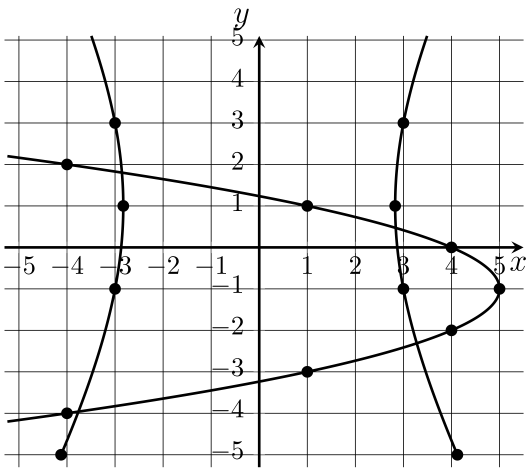
a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).

b) Benutzen Sie dann als Startwert für die Nullstelle im 2. Quadranten für beide Verfahren

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

und führen Sie je zwei Iterationen durch.

Bem.: Die übrigen Nullstellen müssen nicht berechnet werden.



Teil a) Skizze:
Parabel $x = 5 - (y+1)^2$ und Hyperbel $\frac{x^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{32} = 1$ oder Wertetabelle zu $x = \pm\sqrt{\frac{33+y^2-2\,y}{4}}$. Zu skizzieren ist der gesamte Bereich:
Startwerte:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 3.5 \\ -2.5 \end{pmatrix} .$$

(2)

Teil b) Newton-Verfahren:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + 2\,y + x - 4 \\ x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{y}{2} - \frac{33}{4} \end{pmatrix} \to f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2\,y+2 \\ 2\,x & -\frac{y}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Newton-Iteration:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & | & 3 \\ -4 & 0 & | & 4 \end{pmatrix} \to \Delta\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 6 & | & -1 \\ -6 & -0.5 & | & -0.75 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 6 & | & -1 \\ 0 & 35.5 & | & -6.75 \end{pmatrix} \to \Delta\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.1408450704 \\ -0.1901408451 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2.85915493 \\ 1.809859155 \end{pmatrix}$$

(4)

Vereinfachtes Newton-Verfahren (erster Schritt und $f(\mathbf{x}_1)$ vom Newton-Verfahren):

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & | & -1 \\ -4 & 0 & | & -0.75 \end{pmatrix} \to \Delta\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.1875 \\ -0.296875 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2.8125 \\ 1.703125 \end{pmatrix}$$

(2)

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei die Wertetabelle

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & -1 & 0 & 2 & 3 \\ \hline f(x_i) & 4 & 3 & -1 & 3 \end{array}.$$

a) Berechnen Sie die **drei** fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema und stellen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(x)$ in der **Newton-Darstellung** auf.

$$\begin{array}{r|ccccccc}
x_0 = -1 & 4 & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
x_1 = 0 & 3 & \rightarrow & [x_0, x_1]f & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_2 = 2 & -1 & \rightarrow & [x_1, x_2]f & \rightarrow & 1 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_3 = 3 & 3 & \rightarrow & 4 & \rightarrow & [x_1, x_2, x_3]f & \rightarrow & 0.25
\end{array}$$

b) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler $|P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(\hat{x}) - f(\hat{x})|$ an der Stelle $\hat{x} = 1$ an.
Hinweis: Für die Ableitungen von f gelte: $\max_{x \in [-1,3]} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{8 \cdot (n-1)^2}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es sei nun das folgende Newton-Schema gegeben:

$$\begin{array}{c|c|ccccccc}
i & y_i & [y_i]g & & [y_{i-1}, y_i]g & & [y_{i-2}, y_{i-1}, y_i]g & & [y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i]g \\ \hline
0 & -1 & 0 & & & & & & \\
 & & & \searrow & & & & & \\
1 & 0 & -1 & \rightarrow & -1 & & & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & & \\
2 & 1 & 6 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 4 & & \\
 & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
3 & 6 & -49 & \rightarrow & -11 & \rightarrow & -3 & \rightarrow & -1
\end{array}$$

c) Werten Sie das Interpolationspolynom $P(g|y_0, y_1, y_2, y_3)(y)$ mithilfe des **Horner-artigen Schemas** an der Stelle $\hat{y} = 0.5$ aus.

Teil a) $[x_0, x_1]f = -1$, $[x_1, x_2]f = -2$ und $[x_1, x_2, x_3]f = 2$.

Bem.: Das Schema ist in sich nicht konsistent. Die Zahlen wurden zwecks einfacher Darstellungen modifiziert.
Newton-Darstellung:

$$P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(x) = 4 - (x + 1) + (x + 1)x + 0.25(x + 1)x(x - 2)$$

(2)

Teil b) Die Fehlerformel lautet:

$$|P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(\hat{x}) - f(\hat{x})| \leq |(1 - (-1))(1 - 0)(1 - 2)(1 - 3)| \max_{y \in [-1,3]} \frac{|f^{(4)}(y)|}{4!} \leq 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{8(4 - 1)^2}{4! \cdot 4!} = 0.5$$

(2)

Teil c)

Polynom in Horner-Schema:

$$P(g|y_0, y_1, y_2, y_3)(y) = (y + 1)\{-1 + y(4 + (y - 1)(-1))\}$$

Ausgewertet an der Stelle $\hat{y} = 0.5$ ergibt:

$$P(g|y_0, y_1, y_2, y_3)(\hat{y} = 0.5) = 1.875.$$

(2)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \ln(\cos(x^2))$. Gesucht ist eine Näherung für das Integral

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

die um höchstens $\varepsilon = 0.03$ von der exakten Lösung abweicht.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Unterteilungen, die dafür mit der **summierten Trapezregel** notwendig ist.

b) Wie viele Unterteilungen wären mit der summierten Gaußformel mit 2 Stützstellen pro Intervall notwendig?

Hinweis: Für $x \in [0,1]$ gilt $|f^{(n)}(x)| \le (n+1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Teil a) Für den Fehler der summierten Trapezregel gilt:

$$|I_1^n(f) - I(f)| \le n\,\frac{h^3}{12}\max_{x\in[a,b]}|f^{(2)}(x)| = \frac{1}{n^2}\frac{(b-a)^3}{12}\max_{x\in[a,b]}|f^{(2)}(x)| \le \frac{1}{n^2}\frac{(1-0)^3}{12}(2+1)^{2+1} = \frac{27}{12\,n^2} \le \varepsilon$$

Somit ergibt sich für n:

$$n \ge \sqrt{\frac{27}{12\,\varepsilon}} = \sqrt{\frac{27}{12\cdot 0.03}} = \sqrt{\frac{300}{4}} = \sqrt{75} = 8.6\ldots$$

Also $n = 9$. **(2)**

Teil b) Für die summierte Gauß-Formel wird aus der Fehlerdarstellung (Formelsammlung)

$$|Q_m(f) - I(f)| = \frac{((m+1)!)^4}{((2\,m+2)!)^3(2\,m+3)}h^{2\,m+3}|f^{(2\,m+2)}(\xi)|$$

mit $m = 1$ (2 Stützstellen) und $|f^{(4)}(x)| \le 5^5 = 3125$ (gem. Hinweis)

$$|Q_m^n(f) - I(f)| \le n\frac{((1+1)!)^4}{((2\cdot 1+2)!)^3(2\cdot 1+3)}h^{2\cdot 1+3}|f^{(4)}(\xi)| \le \frac{n\,h^5}{4320}\,3125 = \frac{1}{n^4}\,\frac{625}{864} \le \varepsilon$$

Somit ergibt sich für n:

$$n \ge \sqrt[4]{\frac{625}{864\cdot 0.03}} = 2.2\ldots$$

Also liefert $n = 3$ die geforderte Genauigkeit. **(2)**