Verständnisfragen-Teil (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. Falls nicht anders gefordert, muss das Ergebnis als Dezimalzahl angegeben werden.

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.		
1.	Es gilt $\text{fl}(x+y) = \text{fl}(x) + \text{fl}(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{D}$.	falsch
2.	Die Anzahl der Elemente in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ hängt von m ab.	wahr
3.	Es gilt $\lvert\text{fl}(x) - x\rvert \le \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	falsch
4.	Die Addition zweier Zahlen ist stets gut konditioniert.	falsch
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 14 in $\mathbb{M}(3,6,-8,8)$ an.	**112**
6.	Falls die Kondition eines Problems schlecht ist, können Störungen der Eingabedaten stark verstärkt werden.	wahr
7.	Die Funktion $f(x) = x\ln(x)$ ist für $x \to \infty$ gut konditioniert.	wahr
8.	Die Funktion $f(x,y) = \frac{x}{y}$ ist für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$ gut konditioniert.	wahr
9.	Wir betrachten die Berechnung einer Summe $S_m := \sum_{j=1}^{m} x_j$. Die Stabilität dieser Summenbildung hängt von der Reihenfolge der Summanden x_j ab.	wahr
10.	Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = x\sin^2(y)$ im Punkt $(1, \frac{\pi}{2})$.	**1**

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.		
1.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\|B\|_\infty = 1$.	wahr
2.	Mit Zeilenäquilibrierung wird eine Verringerung der Rechenaufwand der Gauß-Elimination angestrebt.	falsch
3.	Wir betrachten das gestörte Problem $A\,\tilde{x} = \tilde{b}$. Der absolute Fehler in der Lösung $\|\tilde{x} - x^*\|$ ist maximal um einen Faktor $\|A^{-1}\|$ größer als der absolute Eingabefehler $\|\tilde{b} - b\|$.	wahr
4.	Es existieren stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = L\,R$ gilt.	falsch
5.	Berechnen Sie $\|A\|_2$ für $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.	**3**
6.	Falls die Matrix A orthogonal ist, gilt $\kappa_2(A) = 1$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. der euklidischen Norm ist.	wahr
7.	Es sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung y von $R\,y = b$ über Rückwärtseinsetzen beträgt etwa $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.	falsch
8.	Es sei A symmetrisch positiv definit. Dann ist die Kondition des Problems der Bestimmung der Lösung des Gleichungssystems $A\,x = b$ gut.	falsch
9.	Es sei $A = L\,D\,L^T$ mit einer normierten unteren Dreiecksmatrix L und einer regulären Diagonalmatrix D. Dann ist A symmetrisch positiv definit.	falsch
10.	Es sei A eine Matrix mit $\kappa_\infty(A) = 2$, wobei $\kappa_\infty(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. der Maximumnorm ist. Berechnen Sie $\kappa_\infty(A^{-1})$.	**2**

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, und $A = Q\,R$ eine QR-Zerlegung von A.		
1.	Eine QR-Zerlegung $A = Q\,R$ von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert nur dann, wenn die Matrix A den vollen Spaltenrang n hat.	falsch
2.	Es gilt: $\|A\|_2 = \|R\|_2$, wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm ist.	wahr
3.	Für jede orthogonale Matrix Q gilt $Q^T = Q^{-1}$.	wahr
4.	Die Inverse einer orthogonalen Matrix ist eine orthogonale Matrix.	wahr
5.	Es seien Q eine orthogonale Matrix und $Q\begin{pmatrix}3\\6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\b\end{pmatrix}$ Geben Sie $\|b\|$ an.	**5**
6.	Für jede orthogonale Matrix Q gilt $\kappa_\infty(Q) = 1$, wobei $\kappa_\infty(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. der Maximumnorm ist.	falsch
7.	Die Inverse einer Householder-Transformationen ist eine Householder-Transformation.	wahr
8.	Jede einzelne Householder-Transformation ist symmetrisch und orthogonal.	wahr
9.	Die Householder-Methode zur Bestimmung der QR-Zerlegung ist immer stabil.	wahr
10.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Geben Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ an, so dass $Q_v\,v = \alpha\,v$ gilt.	**-1**

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R = \begin{pmatrix}\tilde{R}\\0\end{pmatrix}$ mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt. Ferner seien $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $x^* = \mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ und $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^*$ und b.		
1.	Die Matrix $\tilde{R}$ ist orthogonal.	falsch
2.	Die Matrix $\tilde{R}$ kann man über Gauß-Elimination mit Pivotisierung bestimmen.	falsch
3.	Je kleiner der Winkel Θ, desto besser ist die Kondition des linearen Ausgleichsproblems.	wahr
4.	Es gilt $\sin\Theta = \frac{\|b-Ax^*\|_2}{\|b\|_2}$.	wahr
5.	Es seien $m = 3$, $n = 1$, $A = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|Ax^* - b\|_2$.	**3**
6.	Es sei $L\,D\,L^T = A^T\,A$ die Cholesky-Zerlegung von $A^T\,A$. Dann gilt $x^* = L^{-T}\,D^{-1}\,L^{-1}\,A^T\,b$.	wahr
7.	Die Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems kann man als Fixpunktiteration darstellen.	wahr
8.	Bei der Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist die Konvergenzordnung in der Regel zwei.	falsch
9.	Eine geeignete Wahl des skalaren Parameters μ im Levenberg-Marquardt-Verfahren kann die Konvergenzordnung der Methode erhöhen.	falsch
10.	Es seien $m = 3$, $n = 2$, $A = \begin{pmatrix}2&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|\tilde{R}\|_2$.	**2**

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung (Jacobi-Matrix) von Φ an der Stelle x.
Weiterhin sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^* und es gelte $f(x^*) = 0$ sowie $f'(x^*)$ regulär.

1.	Es sei $n = 1$. Falls $\Phi'(x^*) = 0$, $\Phi''(x^*) \neq 0$, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration 2.	wahr
2.	Falls die Fixpunktiteration konvergiert, so gilt $\|\Phi'(x^*)\|_\infty < 1$.	falsch
3.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0, 1]$ erfüllt.	falsch
4.	Es sei $n = 1$, $\Phi(x) = 2\cos(\frac{x}{4})$. Die Fixpunktiteration konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.	wahr
5.	Es sei $n = 1$, $\Phi(x) = x^2 + 2x - 6$. Geben Sie den eindeutigen positiven Fixpunkt von Φ an.	**2**
6.	Die Newton-Methode zur Bestimmung der Lösung x^* von $f(x) = 0$ ist lokal quadratisch konvergent.	wahr
7.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren dient dazu, den Einzugsbereich der Methode zu vergrößern.	wahr
8.	Wenn das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Lösung x^* von $f(x) = 0$ konvergiert, dann gilt für genügend große k-Werte : $\|\|x_k - x^*\|\| \approx \|\|x_k - x_{k+1}\|\|$.	wahr
9.	Es sei $n = 1$. Die Sekantenmethode zur Bestimmung der Nullstelle x^* von f konvergiert nur dann, wenn die Startwerte x_0, x_1 dieser Methode so gewählt werden, dass $f(x_0)f(x_1) < 0$ gilt.	falsch
10.	Es seien $n = 1$ und $f'(x^*) \neq 0$. Weiter sei $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Bestimmen Sie $\Phi'(x^*)$.	**0**

VF-6: Es seien $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und $P(f \,|\, x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Weiterhin seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

1.	Es sei $\ell_{jn}(x) = \Pi_{k=0,k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$, $0 \leq j \leq n$. Dann gilt $f(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ell_{jn}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	falsch
2.	Es gilt $P(f \,\|\, x_0, \ldots, x_n)^{(n)}(x) = n!\, \delta_n$.	wahr
3.	Das Verfahren von Neville-Aitken ist eine effiziente Methode zur Bestimmung des Wertes $P(f \,\|\, x_0, \ldots, x_n)(x)$ an einer vorgegebenen Stelle x.	wahr
4.	Es gilt $\max_{x\in[a,b]} \|P(f \,\|\, x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)\| \leq \max_{x\in[a,b]} \|P(f \,\|\, x_0, \ldots, x_{n-1})(x) - f(x)\|$.	falsch
5.	Sei $f(x) = 3x^3 - 2x$. Bestimmen Sie den Wert $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$.	**3**

Es sei $f \in C^\infty[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch durch eine Quadraturformel $I_m(f) = (b - a)\sum_{j=0}^{m} w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$ approximiert werden. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$ und $h = \frac{b-a}{n}$.

6.	Der Exaktheitsgrad der summierten Quadraturformel $I_m^n(f)$ ist größer als der von $I_m(f)$.	falsch
7.	Es seien $I_m^{NC}(f)$ und $I_m^G(f)$ die Newton-Cotes-Formel und die Formel der Gauß-Quadratur. Für $m \geq 1$ gilt, dass der Exaktheitsgrad von $I_m^{NC}(f)$ strikt kleiner ist als der von $I_m^G(f)$.	wahr
8.	Es sei $I_2(f)$ die Simpsonregel. Für die summierte Simpsonregel I_2^n gilt $\|I_2^n(f) - I(f)\| \leq c\, h^5$, wobei die Konstante c nicht von n abhängt.	falsch
9.	Es sei $I_m(f)$ die Newton-Cotes-Formel. Es gilt: $I_m^n(f) = I(f)$ falls f ein Polynom vom Grad n ist.	falsch
10.	Es seien $a = 0$, $b = 2$ und $I_1(f)$ die Trapezregel. Berechnen Sie $I_1^2(x^3 + 1)$.	**7**

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Zu beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 8 & 4 & 10 \\ 4 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die LR–Zerlegung von A **mit Spaltenpivotisierung**. Geben Sie L, R und die Permutationsmatrix P explizit an.

Es seien nun

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ die Matrizen der LR-Zerlegung von B, d.h. $B = \tilde{L}\tilde{R}$.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Bx = b$ mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 10 \\ 4 & \alpha & -1 \\ 2 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cc} 8 & 4 & 10 \\ \hline \frac{1}{2} & \alpha - 2 & -6 \\ \frac{1}{4} & -2 & -2 \end{array}\right)$$

1. Fall: $|\alpha - 2| \geq 2$, i.e. $\alpha \notin (0,4)$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 4 & 10 \\ \hline \frac{1}{2} & \alpha - 2 & -6 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{2-\alpha} & -2 + \frac{12}{2-\alpha} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 4 & 10 \\ \hline \frac{1}{2} & \alpha - 2 & -6 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{2-\alpha} & \frac{8+2\alpha}{2-\alpha} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{2-\alpha} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 10 \\ 0 & \alpha - 2 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{8+2\alpha}{2-\alpha} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Fall: $|\alpha - 2| < 2$, i.e. $\alpha \in (0,4)$

Pivotisierung nach dem ersten Schritt:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|cc} 8 & 4 & 10 \\ \hline \frac{1}{4} & -2 & -2 \\ \frac{1}{2} & \alpha - 2 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 4 & 10 \\ \hline \frac{1}{4} & -2 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{2-\alpha}{2} & -4 - \alpha \end{array}\right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0.5 & 1 - 0.5\,\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 10 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 - \alpha \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(4)

b) Es gilt

$$B\,x = b \Leftrightarrow \tilde{L}\,\tilde{R}\,x = b.$$

Vorwärtseinsetzen (substituiere $\tilde{R}\,x = y$ und löse $\tilde{L}\,y = b$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rückwärtseinsetzen (mache im Anschluss die Substitution rückgängig):

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2)

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Die Funktion $y(t) := \alpha\sin(t) + \beta\cos(t) - 1$ soll im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimal an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	0	$\pi/2$	π
y_i	2	4	3

Bestimmen Sie die Parameter α und β optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate:

a) Formulieren Sie dazu das entsprechende lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$. Geben Sie A, x und b explizit an.

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $\|Bx - c\|_2 \to \min_{x\in\mathbb{R}}$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe von Givens-Rotationen. Wie groß ist das Residuum?
Hinweis: Householder-Transformationen oder der Ansatz über Normalengleichungen werden mit 0 Punkten bewertet.

Teil a)

Die Zeilen des Ausgleichsproblems haben die Form $A_{i,\cdot} = \begin{pmatrix}\sin(t_i) & \cos(t_i)\end{pmatrix}, \quad b_i = y_i + 1.$
Gesucht ist also ein $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2$, $x = (\alpha, \beta)^T$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(1)

Teil b)

Das System wird mit Givens–Rotationen auf Dreiecksgestalt gebracht.
Der Eintrag $(2,1)$ wird eliminiert:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \rightsquigarrow c = \frac{3}{5},\ s = \frac{4}{5}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & | & 7 \\ 4 & | & 11 \\ -12 & | & -13 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & | & 13 \\ 0 & | & 1 \\ -12 & | & -13 \end{pmatrix}$$

Der Eintrag $(3,1)$ wird eliminiert:

$$r = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13 \rightsquigarrow c = \frac{5}{13},\ s = -\frac{12}{13}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & | & 13 \\ 0 & | & 1 \\ -12 & | & -13 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 13 & | & 17 \\ 0 & | & 1 \\ 0 & | & 7 \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir

$$13\,x^* = 17 \quad \Leftrightarrow \quad x^* = \frac{17}{13} = 1.3077.$$

Für das Residuum erhalten wir

$$res = \|B\,x^* - c\|_2 = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 7.0711.$$

(4)

(Februar 2000: Aufgabe 4: Nullstellen von Systemen: Fixpunkt/Newton,)
2011: Aufgabe 2:, in der Form als weitere typische Klausur(rechen)aufgabe in den Übungen seit mehreren Jahren

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\left(e^x\, e^{-y} + \ln(x+1)\right) \\ \frac{1}{8}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \left(y - \frac{2}{5}\right)^2\right) \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie: In $[0,1] \times [0,2]$ hat F genau einen Fixpunkt. (Verwenden Sie die $\|\cdot\|_1$-Norm).

b) Wieviele Iterationen sind, ausgehend vom Startwert $(0,0)^T$, mit dem Fixpunktverfahren höchstens erforderlich, um bezüglich der 1-Norm eine Genauigkeit von $\varepsilon = 0.01$ zu erreichen? Geben Sie einen möglichst kleinen Wert an.
Hinweis: Sollten Sie in a) keine Kontraktionszahl L gefunden haben, verwenden Sie im Folgenden die 1-Norm und $L = \dfrac{e}{3}$.

c) Geben Sie für die zweite Iterierte der Fixpunktiteration eine a-posteriori Fehlerabschätzung an.

zu a)

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\left(e^x\, e^{-y} + \ln(x+1))\right) \\ \frac{1}{8}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \left(y - \frac{2}{5}\right)^2\right) \end{pmatrix} \to F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\left(e^x\, e^{-y} + \frac{1}{x+1}\right) & -\frac{e^x\, e^{-y}}{6} \\ \frac{1}{16}\cos\left(\frac{x}{2}\right) & \frac{y}{4} - \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Selbstabbildung:
Anders als in $\mathbb{R}$ gibt es für Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ keine Monotonie. Folglich reicht es nicht aus, *irgendwelche* Punkte einzusetzen. Es müssen also alle einzelnen Komponenten nach oben und unten abgeschätzt werden. (hier sind alle Faktoren und Summanden positiv)

$$x \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad e^x \in [1,e] \subset [1,3],\ \ln(x+1) \in [0, \ln 2] \subset [0,1],\ \sin\left(\frac{x}{2}\right) \in \left[0, \sin\left(\frac{1}{2}\right)\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$y \in [0,2] \quad \Rightarrow \quad e^{-y} \in [e^{-2}, 1] \subset [0,1],\ \left(y - \frac{2}{5}\right)^2 \in \left[0, \left(\frac{8}{5}\right)^2\right] \subset [0,4]$$

Und somit

$$0 = \frac{1}{6}(1 \cdot 0 + 0) \le F_1(x,y) \le \frac{1}{6}(3 \cdot 1 + 1) = \frac{2}{3} < 1$$
$$0 = \frac{1}{8}(0+0) \le F_2(x,y) \le \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} + 2^2\right) = \frac{9}{16} < 2$$

Insgesamt wird also D durch F sicher in D abgebildet.

kontraktiv:
D ist **konvex** und F ist stetig differenzierbar. Wir dürfen die Kontraktivität also durch Abschätzung einer Norm auf D nachweisen.
Hier müssen alle einzelnen Komponenten betragsmäßig nach oben abgeschätzt werden. $|\ |.$ heißt, dass wir von jeder Komponente den Betrag nehmen, $<.$ heißt, dass wir komponentenweise vergleichen; auf D gilt dann (hier brauchen wir noch $|\cos(.)| \le 1$ und $|y/4 - 1/10| \le 2/5$):

$$|F'(x,y)|. \le . \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(e+1) & \frac{e}{6} \\ \frac{1}{16} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.619714 & 0.453047 \\ 0.0625 & 0.4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|F'(x,y)\|_1 \le \frac{e}{6} + \frac{2}{5} = 0.853047 \le 0.9 := L$$

Zudem ist $D = [0,1] \times [0,2]$ **vollständig**. Also sind alle Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt und somit folgt, dass es in D genau einen Fixpunkt gibt.
. **(5)**

zu b)

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_1 = F(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0.166667 \\ 0.02 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.166667 \\ 0.02 \end{pmatrix} \to \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_1 = 0.186667$$

Die a-priori Abschätzung ergibt dann

$$(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*\|_1 \le)\ \frac{L^n}{1-L}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_1 \overset{!}{\le} \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n \ge \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon\,(1-L)}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|_1}\right)}{\ln(L)} = \frac{\ln\left(\frac{0.01\,(1-0.9)}{0.186667}\right)}{\ln(0.9)} = 49.6\ldots \left(53.6\ldots \text{ für } L = \frac{e}{3}\right).$$

und somit reichen 50 Iterationen aus (höchstens 50), um die geforderte Genauigkeit zu erzielen. **(2)**

zu c)

$$\mathbf{x}_2 = F(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 0.218686 \\ 0.0284546 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.0520198 \\ 0.00845461 \end{pmatrix} \to \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|_1 = 0.0604744$$

Damit erhalten wir als a-posteriori Fehlerabschätzung

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|_1 \le \frac{L}{1-L}\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|_1 = \frac{0.9}{1-0.9}0.0604744 = 9 \cdot 0.0604744 = 0.544269 < 0.55 \left(0.58351 \text{ für } L = \frac{e}{3}\right).$$

(2)

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Für die Funktion F ist eine Wertetabelle gegeben

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$F(x)$	2	1.5	3.5	3	0	2	1

Der Funktionswert $F(-0.75)$ soll mithilfe eines Polynoms zweiten Grades möglichst gut angenähert werden.

1. Wählen Sie geeignete Stützstellen für diese Annäherung. Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Berechnen Sie zu den in a) bestimmten Stützstellen den entsprechenden Näherungswert mit dem Neville-Aitken-Schema. Sollten Sie keine Stützstellen bestimmt haben, verwenden Sie $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$.
3. Geben Sie eine möglichst gute Fehlerabschätzung für den in Aufgabenteil b) berechnteten Näherungswert an.

Hinweis: Für alle $n \geq 2$ und alle $x \in [-3, 3]$ gilt: $|F^{(n)}(x)| \leq \frac{n^2-1}{2}$.

Teil a) Für das Polynom p_2 müssen wir 3 Tabellenwerte benutzen, da wir ein Interpolationspolynom vom Grad 2 konstruieren.
Der Knotenpolynom-Anteil in der Fehlerformel soll minimiert werden.
Die Wahl $x_0 = -2$, $x_1 = -1$ und $x_2 = 0$ ergibt: $|(-0.75 - (-2)) \cdot (-0.75 - (-1)) \cdot (-0.75 - 0)| = \frac{15}{64}$.
Die Wahl $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ ergibt: $|(-0.75 - (-1)) \cdot (-0.75 - 0) \cdot (-0.75 - 1)| = \frac{21}{64}$.
Der Knotenpolynom-Anteil in der Fehlerformel wird also durch die Wahl $x_0 = -2$, $x_1 = -1$ und $x_2 = 0$ minimiert.
. **(1)**

Teil b) Tableau:

x_i	$P_{i,0}$		$P_{i,1}$		$P_{i,2}$
-2	1.5				
		$\searrow$			
-1	3.5	$\to$	$3.5 + \frac{3.5-1.5}{-1-(-2)}(-0.75-(-1)) = 4$		
		$\searrow$		$\searrow$	
0	3	$\to$	$3 + \frac{3-3.5}{0-(-1)}(-0.75-0) = 3.375$	$\to$	$3.375 + \frac{3.375-4}{0-(-2)}(-0.75-0) = 3.6094$
		$\searrow$		$\searrow$	
1	0	$\to$	$0 + \frac{0-3}{1-0}(-0.75-1) = 5.25$	$\to$	$5.25 + \frac{5.25-3.375}{1-(-1)}(-0.75-1) = 3.6094$

Also $F(-0.75) \approx p_2(-0.75) = 3.6094$ **(2)**

Teil c) Die Fehlerformel lautet:

$$|F(-0.75) - p_2(-0.75)| \leq \frac{1}{3!} \max_{x\in[x_0,x_2]} |f^{(3)}(x)| \cdot |(-0.75 - x_0)(-0.75 - x_1)(-0.75 - x_2)|.$$

Mit dem Hinweis folgt:

$$|F(-0.75) - p_2(-0.75)| \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{3^2-1}{2} \cdot \frac{15}{64} = \frac{5}{32} = 0.15625.$$

(bzw. $|F(-0.75) - p_2(-0.75)| \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{3^2-1}{2} \cdot \frac{21}{64} = \frac{7}{32} = 0.21875$) **(2)**

Aufgabe 5 (5 Punkte)

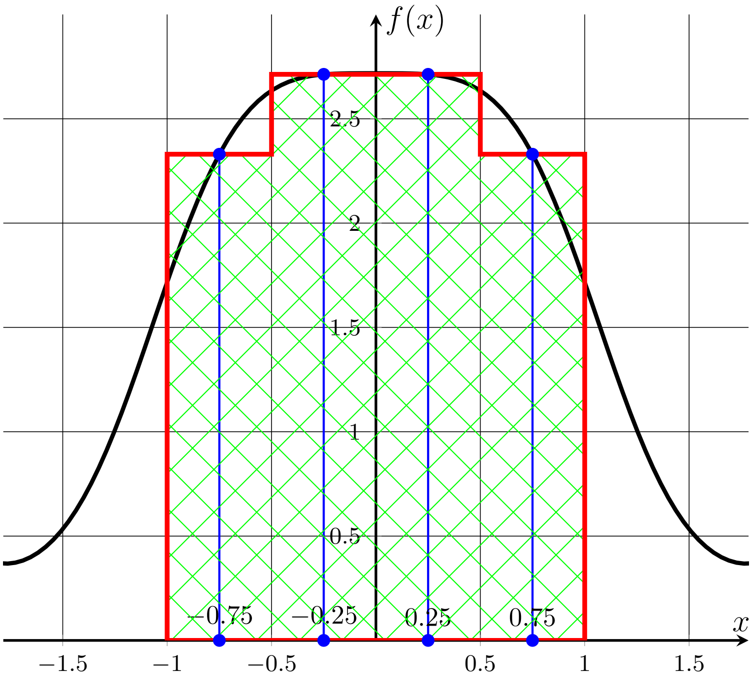
Gegeben sei die Funktion $f(x) := \exp(\cos(x^2))$.
Gesucht ist eine numerische Approximation des Integrals $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

a) Zeichnen Sie die Fläche, die mithilfe der **summierten Mittelpunktsregel** mit $n = 4$ Unterteilungen gerechnet wird, in die Abbildung (s.u.) ein. Tragen Sie die numerischen Werte der Stellen, an denen f ausgewertet werden muss, in die Skizze ein.

b) Bestimmen Sie für die **summierte Trapezregel** eine geeignete Anzahl an Teilintervallen n, so dass der Quadraturfehler höchstens $\varepsilon = 0.4$ beträgt.
Hinweis: Für $x \in [-1, 1]$ gilt: $|f'(x)| \leq 4$, $|f^{(2)}(x)| \leq 6$, $|f^{(3)}(x)| \leq 30$ und $|f^{(4)}(x)| \leq 120$.

c) Führen Sie die Berechnung der summierten Trapezregel für $n = 4$ Teilintervallen durch.

Teil a) f wird an den Punkten -0.75, -0.25, 0.25 und 0.75 ausgewertet.



(2)

Teil b)
Mit der Fehlerformel der summierten Trapezregel gilt:

$$\left|T(h) - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx\right| \leq \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)| = \frac{(b-a)^3}{12} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)|$$

$$\overset{\text{Hinweis}}{\leq} \frac{8}{12} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot 6 \overset{!}{\leq} \varepsilon$$

Nach n umgeformt ergibt dies:

$$n \geq \sqrt{\frac{4}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{4}{0.4}} \approx 3.1\ldots$$

Also werden $n = 4$ Teilintervalle benötigt. **(2)**

Teil c)

$$T_4 = \frac{2}{4}\left(\frac{1}{2}f(-1) + f(-0.5) + f(0) + f(0.5) + \frac{1}{2}f(1)\right) = 4.8525.$$

(1)