Aufgabe 1 (2+1+1+1+1 = 6 Punkte)

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante, sowie

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 12\lambda & 1 & 6\lambda+1 \\ 0 & 2\lambda & 2\lambda+1 \end{pmatrix}.$$

1a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung ohne Pivotisierung von A und geben Sie $\sum_{i,j} L_{i,j}$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_{i,j} L_{i,j}$	6	$3+5\lambda$	7λ	0	-1	3	2	$1+4\lambda$	-5λ	7

LR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 12\lambda & 1 & 6\lambda+1 \\ 0 & 2\lambda & 2\lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2\lambda & 2\lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

also

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \sum_{i,j} L_{i,j} = 3+5\lambda.$$

Es seien nun

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.81 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & -0.53 & 0.38 \\ 0 & 0 & -0.09 \end{pmatrix}$$

Dabei sind $\tilde{L}$ und $\tilde{R}$ die Matrizen der LR-Zerlegung von B, d.h. $B = \tilde{L}\tilde{R}$.

1b) Berechnen Sie $\det(B)$ in **zweistelliger** Gleitpunktarithmetik.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\det(B)$	0.023	0.043	0.0432	0.02	0.04	0.2	3	0.4	1.5	0.026

Es gilt

$$\det(B) = \det(\tilde{L}\,\tilde{R}) = \det(\tilde{L}) \cdot \det(\tilde{R}) = 1 \cdot (0.9 \cdot 0.53 \cdot 0.09) = 0.48 \cdot 0.09 = 0.043.$$

Es seien nun

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \; \hat{R} = \begin{pmatrix} 16 & \alpha+4 & -4 \\ 0 & 2\,\alpha & 8 \\ 0 & 0 & \alpha-3 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ -4\,\alpha \\ -32 \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dabei sind $\hat{L}$, $\hat{R}$ und P die Matrizen der LR-Zerlegung von C, d.h. $P\,C = \hat{L}\hat{R}$. Wir lösen das Gleichungssystem $Cx = b$ mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

1c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $Cx = b$ nicht oder nicht eindeutig lösbar?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
α	-4 und 0	3 und 0	2	5	0	-4 und 1	1 und 2	8	-4	1

Für $\alpha \in \{3, 0\}$ ist C nicht invertierbar, $\det(C) = \det(\hat{R}) = 16 \cdot 2\alpha \cdot (\alpha - 3)$.

1d) Bestimmen Sie mittels Vorwärtseinsetzen y_3, wobei $\hat{L}y = Pb$ gilt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
y_3	$9-4\,\alpha$	$-4\,\alpha-16$	-32	12	$8\,\alpha-48$	$-4\,\alpha$	1	$4\,\alpha-32$	$-8\,\alpha-4$	$-16\,\alpha$

Vorwärtseinsetzen:

$$\hat{L}\,y = P\,b \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -32 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & | & -4\,\alpha \end{pmatrix} \Big\downarrow \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -32 \\ -4\,\alpha - 16 \end{pmatrix}.$$

1e) Eine andere rechte Seite führt auf $y = (0, -32, -4\,\alpha + 12)^T$. Bestimmen Sie mittels Rückwärtseinsetzen $\sum_i x_i$, wobei $\hat{R}x = y$ gilt. Dabei nehmen wir an, dass C invertierbar ist.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_i x_i$	5	-5	-2	-4	$3\,\alpha$	3	1	8	$-\alpha - 1$	$-6\,\alpha$

Rückwärtseinsetzen ($\alpha + 4 \neq 0$ und $2\,\alpha \neq 0$):

$$\hat{R}\,x = y \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 16 & \alpha + 4 & -4 & | & 0 \\ 0 & 2\,\alpha & 8 & | & -32 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & | & -4\,\alpha + 12 \end{pmatrix} \Big\uparrow \longrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (1+1+2 = 4 Punkte)

Wir betrachten das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 = \min_{y\in\mathbb{R}^n} \|Ay - b\|_2$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ und Daten $b = (1, 0, 1, 0)^T \in \mathbb{R}^4$. Von der Matrix sei die QR-Zerlegung $A = Q\,R$ bekannt mit

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2a) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mithilfe der QR-Zerlegung. Geben Sie x_1 an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x_1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{12}$	$-\frac{\sqrt{2}}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	3	$\sqrt{2}$	2	$-\sqrt{2}$	1	4

Berechne

$$Q^T\,b = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Löse anschließend $\tilde{R}\,x = b_1$, also

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.117851 \\ 0.235702 \end{pmatrix}.$$

2b) Geben Sie die Norm des Residuums $\|Ax - b\|_2$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|Ax - b\|_2$	2	1	9	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{6}$	0	6

Das Residuum ist durch $\|b_2\|_2 = 1$ gegeben.

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}} \|Bx - c\|_2$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -58 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist $x^* = -2$.

2c) Wie groß darf der absolute Fehler $\|\tilde{c} - c\|_2$ von c höchstens sein, damit der relative Fehler in x, ebenfalls gemessen in der $\|\cdot\|_2$-Norm, nicht größer als 5 Prozent ist?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|\tilde{c} - c\|_2 \leq$	1.56	2.6	−1	1.6	1.2	2.45	1.5	1	0.4	0.35

Die Formeln stehen in der Formelsammlung.

Hier ist $(0 \neq x \in \mathbb{R})$ $\|B\,x\|/\|x\| = |x|\,\|(24,\,0,\,-10)^T\|/|x| = \|(24,\,0,\,-10)^T\|$, also $\kappa_2(B) = 1$. Weiter ist $\|Bx^*\|_2 = 52$ und wir erhalten

$$\frac{\kappa_2(B)}{\cos(\Theta)}\frac{\|\tilde{c} - c\|_2}{\|c\|_2} = \frac{\kappa_2(B)}{\|Bx^*\|_2}\|\tilde{c} - c\|_2 = \frac{1}{52}\|\tilde{c} - c\|_2 \overset{!}{\leq} 0.05.$$

Also muss gelten

$$\|\tilde{c} - c\|_2 \leq 2.6.$$

Aufgabe 3 (1+1+2+1+1+1+2 = 9 Punkte)

Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4}\, x\,(2-x)\, y\,(2-y) \\ \frac{1}{4}\,(4 + x - y) \end{pmatrix} =: F(x,y) = F(\mathbf{x}) \; .$$

Zeigen Sie: Für $D = [0.2, 1.8] \times [0.2, 1.8]$ gilt $F(D) \subset \tilde{D} = I_x \times I_y$. Bestimmen Sie ein möglichst kleines $\tilde{D}$.

3a) Geben Sie I_x an

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
I_x	$[1.0648, 1.5]$	$[1.0324, 1.25]$	$[1, 1]$	$[1.05, 1.5]$	$[1.2, 1.8]$	$[1, 1.5]$	$[1.1, 1.25]$	$[1.25, 2]$	$[1.3, 1.7]$	$[1.2, 1.5]$

3b) Geben Sie I_y an

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
I_y	$[0.3, 0.7]$	$[0.6, 1.4]$	$[0.2, 1]$	$[0.2, 2]$	$[0.3, 0.8]$	$[0.2, 0.7]$	$[0.2, 0.5]$	$[0.6, 2]$	$[0.3, 0.9]$	$[0.2, 1.4]$

Wegen $(x,y) \in [0.2, 1.8]^2$ gilt $x\,(2-x) \in [0.2 \cdot 1.8, 1] = [0.36, 1]$ und $y\,(2-y) \in [0.36, 1]$ (Parabeln der Form $(x - x_0)\,(x - x_1)$ haben ihr Extremum an der Stelle $(x_0 + x_1)/2$) sowie $x - y \in [0.2 - 1.8, 1.8 - 0.2] = [-1.6, 1.6]$. Daraus folgt

$$1.0324 = 1 + \frac{0.36^2}{4} \leq F_1(x,y) = 1 + \frac{x\,(1-x)\,y\,(1-y)}{4} \leq 1 + \frac{1^2}{4} = 1.25$$
$$0.6 = \frac{1}{4}\,(4 + (-1.6)) \leq F_2(x,y) = \frac{1}{4}\,(4 + x - y) \leq \frac{1}{4}\,(4 + 1.6) = 1.4 \; .$$

Insgesamt gilt also $F(D) \subset E \Rightarrow F$ ist selbstabbildend auf $\subset D$.

3c) D ist **konvex** und F ist stetig differenzierbar. Wir dürfen die Kontraktivität also durch Abschätzung einer Norm von F' auf D nachweisen. Bestimmen Sie eine möglichst kleine Kontraktionszahl L, indem Sie in der Jacobi-Matrix alle einzelnen Komponenten, die nur von x bzw. y abhängen betragsmäßig nach oben abschätzen. Verwenden Sie die 1-Norm.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	0.925	0.65	0.6195	0.825	0.625	0.4	0.9	0.95	0.85	0.8

Als Jacobi-Matrix ergibt sich

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\, y\,(2-y)\,(1-x) & \frac{1}{2}\, x\,(2-x)\,(1-y) \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} .$$

Wegen $(x,y) \in D = [0.2, 1.8]^2$ gilt (s.o.) $x\,(2-x) \in [0.36, 1]$ und $y\,(2-y) \in [0.36, 1]$ sowie $1 - x \in [-0.8, 0.8]$ und $1 - y \in [-0.8, 0.8]$ so dass wir durch elementweise Betragsabschätzung (zulässig in der $\|\cdot\|_1$- und $\|\cdot\|_\infty$-Norm, nicht jedoch in der $\|\cdot\|_2$-Norm) erhalten:

$$\|F'(\mathbf{x})\|_1 \leq \left\| \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\|_1 =: \|F'_{max}\|_1 \; .$$

(Hier könnten wir auch die ∞-Norm verwenden, denn $\|F'_{max}\|_\infty = 0.8$!!). Es ist $\|F'_{max}\|_1 = 0.65 =: L$; d.h. F ist kontraktiv auf D.

3d) Berechnen Sie ausgehend vom Startwert $\mathbf{x}^0 = (1,1)^T$ die ersten beiden Iterierten $\mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^2$ und dann damit $\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|_1$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|_1$	0.34375	0.078125	0.39934	0.11205	0.18667	0.44280	0.70565	0.34655	0.1	0.25

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \to \mathbf{x}^1 = F(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}1.25\\1\end{pmatrix} \to \mathbf{x}^2 = F(\mathbf{x}^1) = \begin{pmatrix}1.23438\\1.0625\end{pmatrix}$$
$$\to \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix}-0.015625\\0.0625\end{pmatrix} \to \|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|_1 = 0.078125$$

$$\mathbf{x}^1 = F(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix}5/4\\1\end{pmatrix} \to \mathbf{x}^2 = F(\mathbf{x}^1) = \begin{pmatrix}79/64\\17/16\end{pmatrix} \to \mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix}-1/64\\1/16\end{pmatrix} \to \|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|_1 = 5/64 = 0.078125$$

Zu einem anderen Startwert erhält man $\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|_1 = 0.85$ und $\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|_1 = 0.25$ bei einer Kontraktionszahl $L = 0.6$ in der 1-Norm.

3e) Geben Sie eine a-priori-Fehlerabschätzung für $\mathbf{x}^2$ unter Verwendung der $\|\cdot\|_1$-Norm an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^*\|_1 \leq$	1.47	0.765	0.39934	0.11205	0.18667	0.44280	0.70565	0.34655	0.1	0.25

Es ist $\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|_1 = 0.85$ sowie $L = 0.6$ und somit gemäß a-priori-Abschätzung

$$\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^*\|_1 \leq \frac{L^2}{1-L}\,\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|_1 = \frac{0.6^2}{1-0.6} \cdot 0.85 = 0.765\ .$$

3f) Geben Sie eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für $\mathbf{x}^2$ unter Verwendung der $\|\cdot\|_1$-Norm an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^*\|_1 \leq$	0.77	0.375	0.39934	0.11205	0.18667	0.44280	0.70565	0.34655	0.1	0.25

Es ist $\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|_1 = 0.25$ und somit gemäß a-posteriori-Abschätzung

$$\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^*\|_1 \leq \frac{L}{1-L}\,\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|_1 = \frac{0.6}{1-0.6} \cdot 0.25 = 0.375\ .$$

3g) Wieviele Iterationen n sind für diesen Startwert mit dem Fixpunktverfahren höchstens erforderlich, um bezüglich der 1-Norm eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-5}$ zu erreichen? Geben Sie einen möglichst kleinen Wert an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
n	36	25	21	12	35	24	48	42	37	19

Es gilt gemäß a-priori-Abschätzung

$$\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^*\|_1 \leq \frac{L^n}{1-L}\,\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|_1 \overset{!}{\leq} \varepsilon \iff n \overset{!}{\geq} \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0\|}}{\ln L} = \frac{\ln\left(\frac{10^{-5}\cdot 0.4}{0.85}\right)}{\ln 0.6} = 24.01\ldots \quad .$$

Es sind also höchstens $n = 25$ Schritte erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-5}$ zu erreichen.

Aufgabe 4 (1+1+1+1+2 = 6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : [0, 4.5] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 2\,x\,e^{x/2}$. Wir möchten f mit einem Polynom vom Grad n interpolieren.
Betrachten Sie dazu folgendes Newton-Schema-Tableau:

$$\begin{array}{r|lllll}
x_1 = 1 & [x_1]f & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_2 = 2 & [x_2]f & \rightarrow & [x_1,x_2]f & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_3 = 4 & [x_3]f & \rightarrow & 24.1196 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
x_4 = 4.5 & 85.3896 & \rightarrow & [x_3,x_4]f & \rightarrow & [x_2,x_3,x_4]f
\end{array}.$$

4a) Berechnen Sie $[x_1, x_2]f$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$[x_1, x_2]f$	3.7878	7.5757	0.8244	1.6487	1.8939	5.3186	3.6433	2.7573	4.0155	9.4456

Betrachte folgendes Newton-Schema-Tableau:

$$\begin{array}{r|lllll}
x_1 = 1 & 3.29744 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_2 = 2 & 10.8731 & \rightarrow & \mathbf{7.57568} & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_3 = 4 & 59.1124 & \rightarrow & 24.1196 & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_4 = 4.5 & 85.3896 & \rightarrow & 52.5544 & \rightarrow & \mathbf{11.3739}
\end{array}.$$

4b) Berechnen Sie $[x_2, x_3, x_4]f$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$[x_2, x_3, x_4]f$	5.6870	11.374	3.0696	12.060	9.3571	7.6573	0.9179	6.5433	3.5122	1.5133

Siehe Lösung zur a).

Betrachten Sie nun folgendes Newton-Tableau:

$$\begin{array}{r|lllll}
\hat{x}_0 = -1 & 1 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
\hat{x}_1 = 0 & 1 & \rightarrow & 0 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
\hat{x}_2 = 1 & -1 & \rightarrow & -2 & \rightarrow & -1
\end{array}.$$

4c) Berechnen Sie den Wert $P(f|\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2)(1.5)$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$P(f\|\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2)(1.5) =$	3.25	−2.75	−5	2	3.75	8.3333	−1	1.3333	−0.5	1.5

Für das *Newton-Interpolations-Polynom* gilt:

$$\begin{aligned} P(f|x_0, ..., x_n)(x) = [x_0]f + (x - x_0)[x_0, x_1]f + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]f \\ + ... + (x - x_0)...(x - x_{n-1})[x_0, ..., x_n]f. \end{aligned}$$

Setzt man in diese Formel die vorgegebenen Werte ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} P(f|x_0, x_1, x_2) &= 1 + (x - (-1)) \cdot 0 + (x - (-1))(x - 0) \cdot (-1) \\ &= 1 - x - x^2. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich: $P(f|x_0, x_1, x_2)(1.5) = -2.75$.

4d) Für die 2-te Ableitung von f gilt $f''(x) = \left(2 + \frac{x}{2}\right) e^{x/2}$. Bestimmen Sie $f^3_{\max} := \max_{x\in[0,4]} |f^{(3)}(x)|$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$f^3_{\max} =$	9.2363	18.473	10	19	2.7183	5.4366	8.7589	17.632	11.385	21.649

Berechne die Ableitung mit der Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\cdot x\exp(0.5x))' = 2\cdot\exp(0.5x) + 0.5\cdot x\exp(0.5x) \\ \Rightarrow f''(x) &= \exp(0.5x) + f'(x) = 2\cdot\exp(0.5x) + 0.5\cdot x\exp(0.5x) \\ \Rightarrow f'''(x) &= 0.5\exp(0.5x) + f''(x) = 0.5\exp(0.5x) + \big(0.5\exp(0.5x) + 0.5f'(x)\big) \\ &= \exp(0.5x) + 0.5\big(\exp(0.5x) + 0.5\cdot x\exp(0.5x)\big) \\ &= 1.5\exp(0.5x) + 0.25\cdot x\exp(0.5x). \end{aligned}$$

Beachte, dass $f^{(3)}$ streng monoton steigend und positiv ist, also das Maximum bei $x = 4$ liegt. Daraus folgt $\|f^{(3)}\|_\infty = 18.4726$.

Hinweis: Für ein andere Funktion g gilt $\|g^{(3)}\|_{L^\infty([1,4])} = \max_{x\in[1,4]}|g^{(3)}(x)| = 18.5$.

4e) Schätzen Sie nun den Fehler $err_\infty := \max_{x\in[1,4]}|g(x) - P(g|1,2,4)(x)|$ unter Benutzung des Hinweises möglichst gut ab.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
err_∞	3.6971	6.5139	2.9568	5.3013	0.2300	8.7573	1.0345	4.9812	1.5394	2.1126

Wir müessen den Fehler:

$$\max_{x\in[1,4]}|g(x) - P(g|x_1,x_2,x_3)(x)| = \|g - P(g|x_1,x_2,x_3)\|_\infty$$

abschätzen, weil $x_1, x_2, x_3 \in [1,4]$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass wir diesen Fehler folgendermaßen unter Kontrolle bekommen:

$$\|g - P(g|x_1,x_2,x_3)\|_\infty \le \max_{x\in[1,4]}\big|(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\big| \cdot \frac{\|g^{(3)}\|_\infty}{3!}$$

Aus dem Hinweis kennen wir bereits die Maximums-Norm von $g^{(3)}$, also gilt $\frac{\|g^{(3)}\|_\infty}{3!} \le 3.08333$. Es bleibt noch der erste Term zum Abschätzen. Es gilt:

$$h(x) := (x-1)(x-2)(x-4) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

hat bei $\frac{7+\sqrt{7}}{3}$ sein Minimum in $[1,4]$ mit $h(\frac{7+\sqrt{7}}{3}) = -2.11261$. Das ist der betragsmäßig größte Wert von h im Intervall, also folgt:

$$\|g - P(g|x_1,x_2,x_3)\|_\infty \le 2.11261 \cdot 3.08333 = 6.51387.$$

Aufgabe 5 (1+1+1+2 = 5 Punkte)

Es sei $f \in C^\infty([0,1])$ gegeben. Wir möchten das Integral

$$\mathrm{I}(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{dx}$$

bis auf Genauigkeit $\varepsilon = 0.02$ bestimmen.

Weiterhin sollen zur Bestimmung von $\mathrm{I}(f)$ möglichst wenige Funktionsauswertungen genutzt werden.

Hinweis: $\max_{y\in[0,1]}|f^{(1)}(y)| = 31.5$, $\max_{y\in[0,1]}|f^{(2)}(y)| = 454$, $\max_{y\in[0,1]}|f^{(3)}(y)| = 1532.5$, $\max_{y\in[0,1]}|f^{(4)}(y)| = 4350$.

5a) Wie viele Unterteilungen N benötigt man, um $\mathrm{I}(f)$ mit der summierten Mittelpunktsregel $I_0^n(f)$ auf ε genau zu bestimmen?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$n =$	44	31	23	101	13	11	66	75	34	7

Für die Fehlerschranken bei der Mittelpunktsregel, Trapezregel und Simpsonregel gilt:

Regel	nicht summiert	summiert
Mittelpunkt	$\frac{h^3}{24}\|f^(2)\|_\infty$	$\frac{h^2}{24}\|f^(2)\|_\infty$
Trapez	$\frac{h^3}{12}\|f^(2)\|_\infty$	$\frac{h^2}{12}\|f^(2)\|_\infty$
Simpson	$\frac{h^5}{2880}\|f^(4)\|_\infty$	$\frac{h^4}{2880}\|f^(4)\|_\infty$

Entsprechend gilt: Für die summierte Mittelpunktsregel gilt:

$$\frac{h^2}{24} \cdot 454 \le 0.02 \Leftrightarrow h^2 \le 0.001057269 \overset{h>0}{\Longleftrightarrow} h \le 0.03251565 \Leftrightarrow \frac{1}{h} \ge 30.7\ldots \quad \text{also} \quad n = 31.$$

5b) Wie viele Unterteilungen n benötigt man, um $\mathrm{I}(f)$ mit der summierten Trapezregel $I_1^n(f)$ auf ε genau zu bestimmen?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$n =$	62	44	72	11	13	93	16	64	10	8

Analog geht man für die summierte Trapezregel vor:

$$\frac{h^2}{12} \cdot 454 \le 0.02 \Leftrightarrow h^2 \le 5.28634 \cdot 10^{-4} \overset{h>0}{\Longleftrightarrow} h \le 0.022992 \Leftrightarrow \frac{1}{h} \ge 43.4\ldots \quad \text{also} \quad n = 44.$$

5c) Wie viele Unterteilungen n benötigt man, um $\mathrm{I}(f)$ mit der summierten Simpsonregel $I_2^n(f)$ auf ε genau zu bestimmen?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$n =$	4	3	5	8	2	14	17	11	1	23

Und ebenso für die summierte Simpsonregel:

$$\frac{h^4}{2880} \cdot 4350 \le 0.02 \Leftrightarrow h^4 \le 0.0132414 \overset{h>0}{\Longleftrightarrow} h \le 0.339221 \Leftrightarrow \frac{1}{h} \ge 2.9\ldots \quad \text{also} \quad n = 3.$$

5d) Es stehen die summierte Mittelpunktsregel $I_0^n(f)$, summierte Trapezregel $I_1^n(f)$ und summierte Simpsonregel $I_2^n(f)$ zur approximativen Berechnung von $\mathrm{I}(f)$ zur Verfügung. Welche dieser Regeln $I_m^n(f)$ benötigt unter Voraussetzung obiger Genauigkeit ε die wenigsten Funktionen-Auswertungen N von f und wie viele werden benötigt?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$I_m^n(f), N$	$I_2^n(f), 9$	$I_2^n(f), 7$	$I_0^n(f), 44$	$I_1^n(f), 9$	$I_1^n(f), 2$	$I_0^n(f), 8$	$I_2^n(f), 3$	$I_1^n(f), 22$	$I_0^n(f), 23$	$I_2^n(f), 5$

Bei der summierten Mittelpunktsregel $I_0^n(f)$ benötigt man $N = n$ Funktionsauswertungen (jeweils in der *Mitte*).
Bei der summierten Trapezrregel $I_1^n(f)$ benötigt man $N = n + 1$ Funktionsauswertungen (im ersten Intervall zwei und dann jeweils eine am *rechten Rand*).
Bei der summierten Simpson-Rregel $I_2^n(f)$ benötigt man $N = 2\,n + 1$ Funktionsauswertungen (im ersten Intervall drei und dann jeweils zwei (in der *Mitte* und am *rechten Rand*).

Demnach benötigt man mit der summierten Mittelpunktsregel $N = 31$, mit der summierten Trapezregel $N = 45$ und mit der summierten Simpsonregel lediglich $N = 7$ Funktionenauswertungen. Also sollte man die summierte Simpsonregel zum Bestimmen des Integrals $I(f)$ benutzen.