**Verständnisfragen-Teil** (30 Punkte)

Jeder der 6 Verständnisfragenblöcke besteht aus 10 Verständnisfragen. Werden alle 10 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es dafür 5 Punkte. Für 9 richtige Antworten gibt es 4 Punkte; für 8 richtige 3, für 7 richtige 2 und für 6 richtige Antworten gibt es einen Punkt. Werden weniger als 6 Fragen in einem Verständnisfragenblock richtig beantwortet, so gibt es für diesen Block 0 Punkte.
Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. geben Sie das Ergebnis numerisch als Zahl mit mindestens 5 signifikanten Ziffern an. Falls nicht anders gefordert, muss das Ergebnis als Dezimalzahl angegeben werden.

**VF-1:** Es seien $x_{\text{MIN}}$ bzw. $x_{\text{MAX}}$ die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps $:= \frac{b^{1-m}}{2}$ die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | In $\mathbb{M}(10, 4, -8, 8)$ gilt $x_{\text{MIN}} = 10^{-9}$. | wahr |
| 2. | Die Anzahl der Maschinenzahlen in $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ hängt von $m$ ab. | wahr |
| 3. | Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert. | falsch |
| 4. | Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert ein $y \in \mathbb{M}(b, m, r, R)$ mit $\lvert x - y\rvert \leq \text{eps}\lvert x\rvert$. | wahr |
| 5. | Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 17 in $\mathbb{M}(3, 8, -8, 8)$ an. | **122** |
| 6. | Die Kondition eines Problems beschreibt die Sensitivität des Problems unter Störung der Eingabedaten. | wahr |
| 7. | Falls in einem Lösungsverfahren der durch Rundungseffekte verursachte Fehler im Ergebnis viel größer als die relative Maschinengenauigkeit eps ist, ist dieses Verfahren nicht stabil. | falsch |
| 8. | Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist schlecht konditioniert für alle $x \neq 0$ mit $\lvert x\rvert \ll 1$. | falsch |
| 9. | Die Funktion $f(x, y) = xy$ ist gut konditioniert für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. | wahr |
| 10. | Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{rel}(x, y)$ der Funktion $f(x, y) = x^2 + y$ im Punkt $(x, y) = (3, 9)$. | **1** |

**VF-2:** Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Es sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ die Lösung des gestörten Problems $A\,\tilde{x} = \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$. Es gilt $\lVert\tilde{x} - x\rVert \leq \lVert A\rVert\lVert\tilde{b} - b\rVert$. | falsch |
| 2. | Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu $A$. Dann gilt $\kappa_2(B) \leq \kappa_2(A)$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist. | falsch |
| 3. | Für die Konditionszahl der Matrix $A$ gilt $\kappa(A) = \kappa(A^{-1})$. | wahr |
| 4. | Es sei $A = QR$ eine $QR$-Zerlegung von $A$. Dann gilt $Rx = Q^T b$. | wahr |
| 5. | Berechnen Sie $\kappa_2(A)$ der Matrix $= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. | **4** |
| 6. | Die Gauß-Elimination mit Pivotisierung führt auf eine Zerlegung $A = L\,R$. | falsch |
| 7. | Pivotisierung verringert den Rechenaufwand der Gauß-Elimination. | falsch |
| 8. | Falls $A$ symmetrisch positiv definit ist, ist Gauß-Elimination ohne Pivotisierung immer durchführbar. | wahr |
| 9. | Es sei $A$ eine untere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung des Gleichungsssytems $A\,x = b$ über Vorwärtseinsetzen beträgt etwa $\frac{1}{2}n^2$ Operationen. | wahr |
| 10. | Berechnen Sie $\lVert A\rVert_\infty$ für $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. | **14** |

| **VF-3:** | | |
|---|---|---|
| 1. | Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ existiert eine Cholesky-Zerlegung. | falsch |
| 2. | Es sei $A$ symmetrisch positiv definit. Dann ist $A^{-1}$ symmetrisch positiv definit. | wahr |
| 3. | Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten $n \times n$-Matrix über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{6}\, n^3$ Operationen (gem. Vorl. / Buch). | wahr |
| 4. | Für jede symmetrische orthogonale Matrix $Q$ gilt $Q^{-1} = Q$. | wahr |
| 5. | Es sei $A = LDL^T$ mit $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Geben Sie $\det(A^2)$ an. | **4** |
| 6. | Eine $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existiert nur dann, wenn die Matrix $A$ den vollen Spaltenrang $n$ hat. | falsch |
| 7. | Das Produkt zweier Givens-Transformationen ist eine Rotation. | wahr |
| 8. | Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Dann gilt: $Q_v v = v$. | falsch |
| 9. | Es sei $Q$ eine orthogonale Matrix. Dann gilt $\kappa_2(Q) = 1$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist. | wahr |
| 10. | Es seien $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $Q \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ eine orthogonale Matrix und $Qx = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Geben Sie $\lvert\alpha\rvert$ an. | **6** |

**VF-4:** Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n \leq m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, obere Dreiecksmatrizen so, dass $Q\,A = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ \emptyset \end{pmatrix}$ gilt. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$.
Ebenso sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(\hat{x})\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \min \Leftrightarrow A^T\,(A\,x - b) = 0$. | wahr |
| 2. | Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. | wahr |
| 3. | Es sei $Qb =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n,\ b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $x^* = R^{-1} b_1$. | falsch |
| 4. | Die Kondition des Minimierungsproblems $x^* = \mathrm{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ hängt nur von der Konditionszahl $\kappa_2(A)$ ab. | falsch |
| 5. | Es seien $m = 4$, $n = 2$ und $Qb = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|Ax^* - b\|_2^2$. | **5** |
| 6. | Die Gauß-Newton Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\hat{x}$. | falsch |
| 7. | Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren ergibt sich in jedem Iterationsschritt stets ein lineares Ausgleichsproblem $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$, mit einer invertierbaren Matrix $A$. | falsch |
| 8. | Der Rechenaufwand pro Iteration ist im Levenberg-Marquardt-Verfahren größer als in der Gauß-Newton-Methode. | wahr |
| 9. | Eine geeignete Wahl des skalaren Parameters $\mu$ im Levenberg-Marquardt-Verfahren kann den Einzugsbereich der Methode erweitern. | wahr |
| 10. | Es seien $m = 3$, $n = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $x^*$. | **0** |

**VF-5:** Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x^*$ so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \dots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung (Jacobi-Matrix) von $\Phi$ an der Stelle $x$.
Weiterhin sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung $U$ von $x^*$ und es gelte $f(x^*) = 0$, $\det(f'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Falls $\|\Phi'(x^*)\| < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\|x_0 - x^*\|$ hinreichend klein. | wahr |
| 2. | Falls $\Phi'(x^*) \neq 0$, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration höchstens 1. | wahr |
| 3. | Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für $\Phi$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ erfüllt. | wahr |
| 4. | Es seien $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(M) \neq 0$ und $\Phi(x) := Mf(x)$. Das Nullstellenproblem $f(x) = 0$ hat dieselben Lösungen wie das Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$. | falsch |
| 5. | Es sei $n = 1$ und $\Phi(x) := x^2 + x - 16$. Geben Sie den eindeutigen positiven Fixpunkt von $\Phi$ an. | **4** |
| 6. | Das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Lösung $x^*$ von $f(x) = 0$ konvergiert für alle Startwerte $x_0$ mit $\|x_0 - x^*\|$ hinreichend klein. | wahr |
| 7. | Es sei $n > 1$. Wenn das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Lösung $x^*$ von $f(x) = 0$ konvergiert, dann gilt für genügend große $k$-Werte : $\|x_k - x^*\| \approx \|x_k - x_{k+1}\|$. | wahr |
| 8. | Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren gewährleistet Konvergenz des Verfahrens. | falsch |
| 9. | Es seien $n = 1$, $f(x) = xe^x$, und $x_k$, $k = 0, 1, ...$, die durch das Newton-Verfahren induzierte Folge. Es gilt $x_{k+1} = \frac{x_k^2}{x_k+1}$ für $k = 0, 1, \dots$. | wahr |
| 10. | Es seien $n = 1$ und $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}$. Wir betrachten das Sekantenverfahren zur Annährung der Nullstelle dieser Funktion, mit Startwerten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Berechnen Sie $x_2$. | **0.5** |

**VF-6:** Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad $n$, das die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$ interpoliert. Weiter seien $\delta_n$ der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung $n$ von $f$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Es gilt: $P(f\,|\,x_0, \dots, x_n)(x) = P(f\,|\,x_0, \dots, x_{n-1})(x) + \delta_n \Pi_{i=0}^n (x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. | falsch |
| 2. | Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} |P(f\,|\,x_0, \dots, x_n)(x) - f(x)|$ hängt von der Wahl der Stützstellen ab. | wahr |
| 3. | Es sei $P(f\,|\,x_0, \dots, x_n)^{(n)}(x)$ die $n$-te Ableitung des Interpolationspolynoms an der Stelle $x$. Es gilt $P(f\,|\,x_0, \dots, x_n)^{(n)}(x) = n!\,\delta_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. | wahr |
| 4. | Es sei $n = 5$. Es gilt $P(f\,|\,x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)(x) = P(f\,|\,x_3, x_5, x_1, x_2, x_4, x_0)(x)$ für alle $x$. | wahr |
| 5. | Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $f(x_0) = 0$ und $f(x_1) = 4$. Berechnen Sie $P(f|x_0, x_1)(\frac{7}{4})$. | **3** |

Es sei $f \in C^\infty([a, b])$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $I_m(f) = (b - a)\sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ mit $a \le x_0 < \dots < x_m \le b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \dots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \dots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.

| | | |
|---|---|---|
| 6. | Bei der Gauß-Quadratur hängen die Stützstellen $x_j$ nicht von der Funktion $f$ ab. | wahr |
| 7. | Bei der Gauß-Quadratur gilt: $I_m(f) = \int_a^b P(f\,|\,x_0, \dots, x_m)(x)\,dx$, wobei $P(f\,|\,x_0, \dots, x_m)$ für spezifisch gewählte Stützstellen das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad $m$ ist. | wahr |
| 8. | Es sei $I_2(f)$ die Simpsonregel. Es gilt $|I_2^n(f) - I(f)| \le ch^4$, wobei die Konstante $c$ nicht von $n$ abhängt. | wahr |
| 9. | Für die Newton-Cotes Formeln gilt $|I_m(f) - I(f)| \to 0$ für $m \to \infty$. | falsch |
| 10. | Berechnen Sie $\int_0^2 x^4\,dx$ approximativ mit der summierten Trapezregel $I_1^2(f)$. | **9** |