Bem.: Beandelt in den Übungen 1 bis 3, insbesondere in KGUeb1 und KGUeb3 jeweils A1

Aufgabe 1 $2+1+1+2+1 = 7$ Punkte

Gegeben sei das Problem der Auswertung der Funktion

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zur Lösung des Problems betrachten wir die Algorithmen:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{A1}) \quad y_1 := x^2,\ y_2 := 1+y_1,\ y_3 := 1/y_2,\ y_4 := 1-y_3, \\ &(\mathrm{A2}) \quad y_1 := x^2,\ y_2 := 1+y_1, y_3 := y_1/y_2. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Kondition das Problems für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Ist das Problem gut konditioniert? Geben Sie eine Begründung.

c) Gegeben sei der Eingabewert x, der mit einem relativen Fehler von 5% behaftet ist. Welcher relativer Fehler ist in der Ausgabe in erster Näherung zu erwarten?

d) Betrachten Sie die beiden Algorithmen (A1) und (A2). Sind diese Algorithmen stabil? Geben Sie eine Begründung.

e) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Kondition eines Problems und der Stabilität eines Algorithmus zur Lösung dieses Problems?

Lösung

a)

$$f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \ \rightarrow\ f'(x) = \frac{2\,x}{(1+x^2)^2}$$

$$\rightarrow\ \kappa_{rel}(x) = \left|\frac{f(x)\,x}{f'(x)}\right| = \frac{2}{1+x^2} \in (0,2]$$

(2)

b) Ja, da $\kappa_{rel}(x) \leq 2$, ist das Problem für alle $x \in \mathbb{R}$ gut konditioniert. **(1)**

c) In erster Näherung gilt $r_f(x) \approx \kappa_{rel}(x)\, r_x \leq 2 \cdot 0.05 = 0.1 = 10\%$. **(1)**

d) In (A1)ist für $|x| << 1$ $y_3 \approx 1$. Daher tritt bei der Berechnung von y_4 Auslöschung auf, was zu einem instabilen Algorithmus führt. In (A2) gibt es keinen Schritt/Ausdruck, der Auslöschung beinhaltet. **(2)**

e) Es besteht kein direkter Zusammenhang zwischen der Kondition eines Problems und der Stabilität eines Algorithmus zur Lösung dieses Problems. **(1)**

Zusatz:

Die Kondition beschreibt den (bei exakter Rechnung) unvermeidbaren Fehler durch Störung der Eingangsdaten.
Die Stabilität ist die Empfindlichkeit für Störungen des Algorithmus. Genauer: Wir nennen einen Algorithmus **stabil**, wenn die durch ihn im Laufe der Rechnung erzeugten Fehler in der Größenordnung des durch die Kondition des Problems bedingten unvermeidbaren Fehlers bleiben.

Bem.: Beandelt in den Übungen 3 bis 4, insbesondere in GUeb4 A2, KGUeb4 A1, A2 und A3 sowie HUeb4 A1, A3 und A5.

Aufgabe 2 $3 + 6 = 9$ Punkte

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -90 \\ -11 & 0 & 9 \\ 88 & -11 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} -10.5 \\ -2.4 \\ 28.7 \end{pmatrix}.$$

a) Jede Komponente von b sei mit einem relativen Messfehler von $0.5 \cdot 10^{-3}$ behaftet; die Matrix A sei ungestört. Mit welchem relativen Fehler in x (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$) müssen Sie rechnen?

Hinweis: $\|A^{-1}\|_\infty \approx 2.72$.

b) Lösen Sie $A\,x = b$ in 3–stelliger Gleitpunktarithmethik durch Gaußelimination **mit** Skalierung (Zeilenequilibrierung) und **mit** Spaltenpivotisierung.

Lösung

a) Da nur die rechte Seite gestört sein soll, gilt für die Fehlerfortpflanzung (in der $\|\cdot\|_\infty$–Norm)

$$r_\infty(x) \le \kappa_\infty(A) \cdot r_\infty(b)$$

mit den relativen Fehlern $r_\infty(x)$ der Lösung und $r_\infty(b)$ der rechten Seite sowie der Kondition $\kappa_\infty(A)$ der Matrix. Gemäß Aufgabenstellung und Definition gilt

$$r_\infty(b) := \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{\max_i |\Delta b_i|}{\max_j |b_j|} \le \frac{\max_i(\epsilon |b_i|)}{\max_j |b_j|} = \frac{\epsilon \max_i |b_i|}{\max_j |b_j|} = \epsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}.$$

Die Norm von A berechnet sich zu

$$\|A\|_\infty = \max\{1 + 9 + |-90|,\ |-11| + 0 + 9,\ 88 + |-11| + 1\} = \max\{100,\ 20,\ 100\} = 100.$$

Damit gilt gemäß Hinweis und Definition für die Kondition

$$\kappa_\infty(A) := \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 100 \cdot 2.72 = 272,$$

insgesamt also

$$r_\infty(x) \le \kappa_\infty(A) \cdot r_\infty(b) \le 272 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} = 0.136.$$

(3)

b) Die Skalierungsfaktoren $s_i := \sum_{j=1}^{3} |a_{i,j}|$ sind bereits in a) für $\|A\|_\infty$ berechnet worden, und zwar zu

$$s_1 = 100, \qquad s_2 = 20.0, \qquad s_3 = 100,$$

wobei sich die 3–stellige GPA nicht auswirkt. Also lautet die Skalierungsmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 0.0100 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0500 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0100 \end{pmatrix}$$

und die skalierte Matrix sowie die skalierte rechte Seite

$$\tilde{A} := D\,A = \begin{pmatrix} 0.0100 & 0.0900 & -0.900 \\ -0.550 & 0 & 0.450 \\ 0.880 & -0.110 & 0.0100 \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} := D\,b = \begin{pmatrix} -0.105 \\ -0.120 \\ 0.287 \end{pmatrix}.$$

(1)

Für die anschließende Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung erhalten wir in 3–stelliger GPA

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0.0100 & 0.0900 & -0.900 & -0.105 \\ -0.550 & 0 & 0.450 & -0.120 \\ 0.880 & -0.110 & 0.0100 & 0.287 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 0.880 & -0.110 & 0.0100 & 0.287 \\ -0.550 & 0 & 0.450 & -0.120 \\ 0.0100 & 0.0900 & -0.900 & -0.105 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{l_{2,1}=-0.625 \\ l_{3,1}=0.0114}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 0.880 & -0.110 & 0.0100 & 0.287 \\ 0 & -0.0688 & 0.456 & 0.0590 \\ 0 & 0.0913 & -0.900 & -0.108 \end{array}\right)$$

(2)

$$\xrightarrow{Z_2 \leftrightarrow Z_3} \left(\begin{array}{rrr|r} 0.880 & -0.110 & 0.0100 & 0.287 \\ 0 & 0.0913 & -0.900 & -0.108 \\ 0 & -0.0688 & 0.456 & 0.0590 \end{array}\right) \xrightarrow{l_{3,2}=-0.754} \left(\begin{array}{rrr|r} 0.880 & -0.110 & 0.0100 & 0.287 \\ 0 & 0.0913 & -0.900 & -0.108 \\ 0 & 0 & -0.223 & -0.0224 \end{array}\right)$$

(2)

Rückwärtseinsetzen liefert in 3–stelliger GPA

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{-0.0224}{-0.223} = 0.100, \\ x_2 &= \frac{-0.108 - (-0.900) \cdot 0.100}{0.0913} = \frac{-0.108 + 0.0900}{0.0913} = \frac{-0.018}{0.0913} = -0.197, \\ x_1 &= \frac{0.287 - (-0.110) \cdot (-0.197) - 0.0100 \cdot 0.100}{0.880} = \frac{0.287 - 0.0217 - 0.00100}{0.880} \\ &= \frac{0.265 - 0.00100}{0.880} = \frac{0.264}{0.880} = 0.300. \end{aligned}$$

Also $x = (0.300, -0.197, 0.100)^T$ **(1)**

Zusatz:
Ein Vergleich mit der exakten Lösung $(0.3, -0.2, 0.1)^T$ liefert einen relativen Fehler von $r_\infty(x) = 0.01$. Dabei ist die Kondition $\kappa_\infty(\tilde{A}) = 94.5$ immer noch nicht *besonders gut*.

Bem.: Beandelt in den Übungen 5, insbesondere in GUeb5 A1, KGUeb5 A1 sowie HUeb5 A3.

Aufgabe 3 $3 + 1 + 1 + 2 = 7$ Punkte

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 8-\alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \\ 24 - 2\,\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine untere Dreiecksmatrix L und Diagonalmatrix D, so dass $A = L\,D\,L^T$ gilt.

b) Für welche Werte von α ist A positiv definit?

c) Bestimmen Sie die Determinante von A mit der in a) berechneten $L\,D\,L^T$-Zerlegung.

d) Lösen Sie $A\,x = b$ mittels der Zerlegung $A = L\,D\,L^T$ aus a).

Lösung

a)

$$\begin{aligned} d_{11} &= 1, \\ l_{21} &= 2, \\ l_{31} &= 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{22} &= 6 - 2^2 \cdot 1 = 2, \\ l_{32} &= (4 - 2 \cdot 2 \cdot 1)/2 = 0; \end{aligned}$$

$$d_{33} = (8 - \alpha^2) - 2^2 \cdot 1 - 0^2 \cdot 2 = 4 - \alpha^2.$$

L-D-L^T-Zerlegung von A:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

(1)

b) A spd: Einschränkungen für α:

Aus

$$4 - \alpha^2 > 0$$

erhält man

$$2 > |\alpha|$$

Also muss $\alpha \in (-2, 2)$ sein, damit A positiv-definit ist. **(3)**

c) Determinante von A:

$$\det A = 8 - 2 \cdot \alpha^2$$

(1)

d) Lösung des Gleichungssystems:

$$L\,z = b \quad \text{ergibt} \quad z = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 8 - 2\,\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

$$D\,y = z \quad \text{ergibt} \quad y = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$L^T x = y \quad \text{ergibt} \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(2)

Bem.: Beandelt in den Übungen 5 bis 6, insbesondere die kompletten Übungen GUeb6, KGUeb6 und HUeb6.

Aufgabe 4 $2+3+3+2=10$ Punkte

Gegeben seien die Daten

t_i	-1	0	1	2
y_i	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5

Theoretischen Überlegungen zufolge genügen diese der Darstellung (Modellfunktion)

$$y(t) = \alpha + \beta\, t^2.$$

Zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems verwenden wir die $Q\,R$-Zerlegung und benutzen dabei Householder–Spiegelungen.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$ auf. Geben Sie A, x und b explizit an.

b) Führen sie den 1. Schritt zur Eliminierung der Elemente unterhalb der Diagonalen in der ersten Spalte explizit durch: $\left(A^{(0)}|b^{(0)}\right) = (A|b) \to \left(A^{(1)}|b^{(1)}\right)$.
(**Hinweis:** Das Ergebnis darf ausnahmsweise Brüche enthalten.)

c) Andere Messungen (Daten) mit der selben Modellfunktion führen nach zwei Spiegelungen auf

$$\left(A^{(2)}|b^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -4.4721 & | & -6.261 \\ 0 & 3.7417 & | & 4.1426 \\ 0 & 0 & | & -0.2648 \\ 0 & 0 & | & -0.18597 \\ 0 & 0 & | & -0.18597 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie x^* und das Residuum. Geben Sie die Modellfunktion explizit an.

d) Lineare Ausgleichsprobleme $\|Ax - b\|_2 \to \min$, mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\operatorname{Rang}(A) = n$, kann man sowohl über eine QR-Zerlegung (mittels Householder-Spiegelungen oder Givens-Rotationen), als auch über die Normalgleichungen (mittels Cholesky-Verfahren) lösen. Welche der beiden Vorgehensweisen liefert im Allgemeinen ein stabileres Verfahren? Erklären Sie den Grund dafür.

Lösung

a) Die *least–squares*–Lösung ist definiert als $x^* = (\alpha^*, \beta^*)$ mit

$$\|A\,x^* - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^2} \|A\,x - b\|_2\,,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(2)

(Damit werden die Quadrate der Fehler, also der Term $\sum_{i=0}^{3}(y(t_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{3}(\alpha + \beta\, t_i^2 - y_i)^2$, minimiert.)

b) Erste **Householder-Spiegelung:** (Darstellung im Tableau)

				1	1	2	
				1	0	0.5	
				1	1	1.5	
				1	4	5	$\alpha_1 = 2$
3	1	1	1	(6)	8	13	$\beta_1 = 0.166667$
			0.5	-2	-3	-4.5	
			0.166667	0	-1.33333	-1.66667	
			0.166667	0	-0.333333	-0.666667	
			0.166667	0	2.66667	2.83333	

(3)

c) Nach zweiter **Householder-Spiegelung** haben wir:
(**Bem:** Diese Matrix entsteht, wenn man die Messungen mit einem weiteren Messwert $(t_i, y_i) = (2, 5)$ ergänzt. Die Berechnung wurde komplett mit doppelter Genauigkeit durchgeführt.)

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{5} & -4.4721 & | & -6.261 \\ 0 & 3.7417 & | & 4.1426 \\ 0 & 0 & | & -0.2648 \\ 0 & 0 & | & -0.18597 \\ 0 & 0 & | & -0.18597 \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$x^* = \begin{pmatrix} 0.585714 \\ 1.10714 \end{pmatrix}$$

(1)

$$\text{und} \quad ||A\,x^* - b||_2 = 0.37321$$

(1)

Also ist die Funktion mit den gemäß der Gauß'schen Fehlerquadratmethode optimalen Parametern gegeben durch

$$y(t) = 0.58571 + 1.1071\,t^2.$$

(1)

d) Wenn man das Ausgleichsproblem über die Normalgleichungen löst, so gilt für die Systemmatrix $A^T A$ bei der Kondition $\kappa_2(A^T A) = (\kappa_2(A))^2$ – wir lösen ja $A^T A\,x = A^T b$. Das Quadrieren der Kondition findet bei Lösung per $Q\,R$-Zerlegung nicht statt. Somit ist dort i.a. mit geringeren Fehlern bei Störungen in den Eingaben/Messungen zu rechnen. Zudem ist die Berechnung der $Q\,R$-Zerlegung mittels orthogonaler Transformationen i.a. stabiler als die Berechnung der Cholesky-Zerlegung. **(2)**

Bem.: Ist neben der Vorlesung im Wesentlichen in den Übungen 8 behandelt worden, in KGUeb und HUeb incl. Skizzen.

Aufgabe 5 3 + 2 + 2 + 1 = 8 Punkte

Die Funktion

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} - \sin(x_2) \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, x_2)^T,$$

besitze in $D := [0,1] \times [0,1]$ genau eine Nullstelle x^* (kein Beweis nötig).

a) Geben Sie die Iterationsfunktion Φ des Newton-Verfahrens $x^{k+1} = \Phi(x^k)$, $k = 0, 1, \ldots$, zur Bestimmung von Näherungen der Nullstelle x^* explizit an.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x^0 = (1, \frac{1}{2}\pi)^T$ eine Iteration des Newton-Verfahrens durch (Rechnen Sie exakt, d.h. ohne Taschenrechner).

c) Erläutern Sie die Funktionsweise des Newton-Verfahrens im eindimensionalen Fall anhand einer Skizze.

d) Welche Konvergenzordnung besitzt das Newton-Verfahren im Allgemeinen? Ist die Konvergenz im Allgemeinen lokal oder global? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

a)

$$J(\mathbf{x}) := f'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x_1}} & -\cos(x_2) \\ 2\,x_1 & 2\,x_2 \end{pmatrix} \qquad , \qquad J^k := f'(\mathbf{x}^k)$$

Newton: Löse $J^k\,\Delta\mathbf{x}^k = -f(\mathbf{x}^k)$ und setze $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta\mathbf{x}^k$ bzw. formal $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - (J^k)^{-1} f(\mathbf{x}^k)$; also

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (J(\mathbf{x}))^{-1}\ f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{x_1}} & -\cos(x_2) \\ 2\,x_1 & 2\,x_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{x_1} - \sin(x_2) \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

(3)

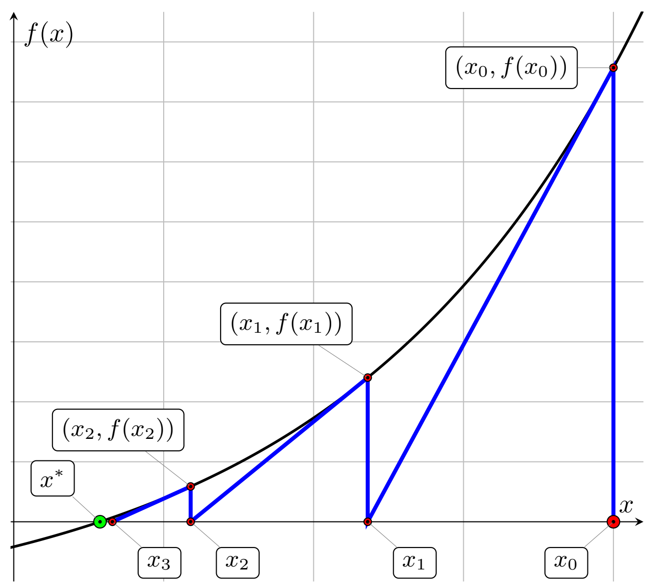
b)

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/2 \end{pmatrix} \to f(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi^2/4 \end{pmatrix} \text{ und } J^0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 2 & \pi \end{pmatrix}$$

$$\to \Delta\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi/4 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi/4 \end{pmatrix}$$

(2)

c) Skizze Newton-Verfahren: (**Korrekturhinweis:** Mindestens 2 Iterationen und Grenzwert)



Zu gegebenem Startwert x_0 ergibt sich x_1 als Schnittpunkt der x-Achse mit der Tangente an den Graphen der Funktion $(x_0, f(x_0))$. Jetzt ist x_1 gegeben $\to$ x_2, usw. Der Grenzwert dieser Iteration ist die Nullstelle x^* der Funktion $f(x)$. **(2)**

d) I.A., d.h. wenn die Jakobimatrix an der Stelle $\mathbf{x}^*$ regulär ist, liegt *lokal quadratische* Konvergenz vor. Ist die Jakobimatrix dort nicht regulär, so kann man nur lineare Konvergenz erwarten. **(1)**

Zusatz: Gem. Vorlesung gilt: Ist $f'(\mathbf{x})$ Lipschitz-stetig (z.B. zweimal stetig differenzierbar) und $f'(\mathbf{x}^*)$ regulär, so gibt es eine Umgebung von $\mathbf{x}^*$, in der das Newtonverfahren für jeden Startwert (aus der Umgebung) quadratisch konvergiert.

Bem.: Ist neben der Vorlesung im Wesentlichen in den Übungen 8 behandelt worden, in KGUeb und HUeb incl. Skizzen. e^{-x^2} kam in mehreren Übungen/Verständnisfragen dran.

Aufgabe 6 $3 + 3 + 2 = 8$ Punkte

Auf dem Intervall $[0, 0.5]$ betrachten wir das Fixpunktproblem

$$x = \tfrac{1}{2}e^{-x^2}.$$

a) Weisen Sie die Voraussetzungen des Banachschen-Fixpunktsatzes explizit nach. (Begründen Sie Ihre Aussagen; ansonsten gibt es keine Punkte.)

b) Führen Sie ausgehend von einem geeigneten Startwert x_0 (dieser ist auf eine Nachkommastelle zu runden) zwei Schritte des Fixpunktverfahrens durch, und geben Sie dann eine a–posteriori–Fehlerschätzung an.

c) Erläutern Sie anhand einer Skizze, dass bei diesem Problem die Fixpunktiteration global konvergiert.

Lösung
Hier schon vorgegeben: Fixpunktform:

$$F(x) := \frac{e^{-x^2}}{2} = x \quad \text{mit} \quad F : \mathbb{R} \to (0, 0.5],$$

also kommt nur $D = [0, 0.5]$ für die Fixpunktbetrachtung in Frage.

a)
$D = [0, 0.5]$ ist abgeschlossen / vollständig. Da $F(D) \subset F(\mathbb{R}) \subset D$ ist, sind wir eigentlich schon fertig. Wir betrachten aber etwas genauer:
F ist monoton fallend auf D und $F(0) = 0.5$ sowie $F(0.5) = 0.3894$. Also ist F selbstabbildend auf D und genauer $F(D) \subset [0.38, 0.5] =: D'$

F ist stetig differenzierbar und es gilt:

$$F'(x) = -x \cdot e^{-x^2} \qquad (\to |F'(x)| \le 0.5 \cdot e^0 = 0.5 \quad \text{auf} \quad D).$$

Genauer: $F''(x) = 2 \cdot (x^2 - 1/2) \cdot e^{-x^2} < 0$ auf $[0, \sqrt{2}/2 = 0.7071]$. Damit ist F' auf D' streng monoton fallend und negativ. $|F'|$ nimmt also sein Extremum am *rechten Rand* an: $|F'(0.5)| = 0.3894 < 0.4$. Also ist F kontraktiv auf D'. Wähle zum Beispiel $L = 0.4$.
Somit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. **(3)**

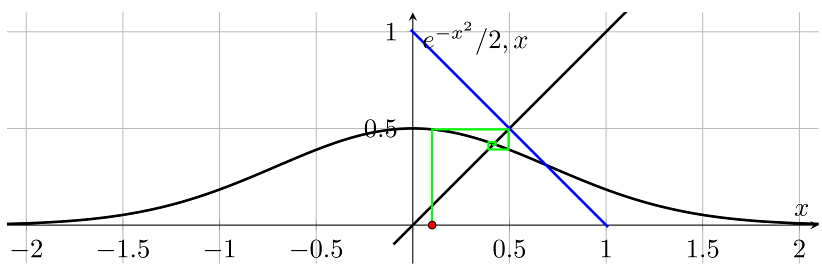
b) Da der Startwert auf eine Nachkommastelle zu runden ist, setzen wir $x_0 := 0.4 \in D'$. Dies ergibt dann $x_1 = F(x_0) = 0.42607$ und $x_2 = F(x_1) = 0.41699$.

Hierzu lautet die a-posteriori Fehlerabschätzung

$$|x_2 - x^*| \le \frac{L}{1-L} \cdot |x_2 - x_1| = \frac{0.4}{0.6} \cdot 0.00908 = 0.00605$$

(3)

c) Skizze Fixpunktiteration:



Erster Schritt bei beliebigen x_0 (hier 0.1) führt auf $x_1 = F(x_0) \in [0, 0.5]$. Dort sind alle Voraussetzungen erfüllt. Man *sieht* auch, dass die Steigung betragsmäßig deutlich kleiner als 1 ist. Zum Vergleich: Die *blaue* Gerade hat steigung -1. Weiterhin sieht man (negative Steigung) die alternierende Konvergenz. **(2)**

Bem.: Ist neben der Vorlesung im Wesentlichen anhand diverser Beispiele in den Übungen 11 behandelt worden.

Aufgabe 7 $3 + 2 = 5$ Punkte

Die Funktion $f(x) = \sin 2x$ ist als Tabelle gegeben.

x	0.0	0.1	0.2	0.3
$\sin 2x$	0.0	0.1987	0.3894	0.5646

a) Berechnen Sie einen Näherungswert für $f(0.15)$ mit dem Neville-Aitken-Schema unter Benutzung aller Tabellenwerte.

b) Bestimmen Sie für den berechneten Wert eine möglichst gute Fehlerschranke.

a) Näherung durch Neville-Aitken-Schema berechnen:

x_i	$f_i = P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$	$P_{i,3}$
$x_0 = 0$	0			
$x_1 = 0.1$	0.1987	0.29805		
$x_2 = 0.2$	0.3894	0.29405	0.29505	
$x_3 = 0.3$	0.5646	0.3018	0.295987	0.295519

Somit erhalten wir $\sin(2 \cdot 0.15) \approx 0.29552$. **(3)**

Nebenrechnung:

$$P_{i,j} = P_{i,j-1} + \frac{P_{i,j-1} - P_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}(x - x_i)$$

$$P_{1,0} = 0.1987 + \frac{0.1987 - 0}{0.1 - 0}(0.15 - 0.1) = 0.29805$$

$$P_{2,0} = 0.3894 + \frac{0.3894 - 0.1987}{0.2 - 0.1}(0.15 - 0.2) = 0.29405$$

$$P_{3,0} = 0.5646 + \frac{0.5646 - 0.3894}{0.3 - 0.2}(0.15 - 0.3) = 0.3018$$

$$P_{2,1} = 0.29405 + \frac{0.29405 - 0.29805}{0.2 - 0}(0.15 - 0.2) = 0.29505$$

$$P_{3,1} = 0.3018 + \frac{0.3018 - 0.29405}{0.3 - 0.1}(0.15 - 0.3) = 0.295987$$

$$P_{3,2} = 0.295987 + \frac{0.295987 - 0.29505}{0.3 - 0}(0.15 - 0.3) = 0.295519$$

b) Fehlerabschätzung:

Es gilt (Formelsammlung)

$$|f(0.15) - P(f|0, 0.1, 0.2, 0.3)| = \left| x(x - 0.1)(x - 0.2)(x - 0.3)\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \right|$$

für ein $\xi \in (0, 0.3)$. Ferner gilt $f^{(4)}(x) = 16 \sin(2x)$.

Die Funktion $f^{(4)}$ ist in $[0, 0.3]$ positiv und monoton steigend $\to \max_{\xi \in [0,3]} f^{(4)}(\xi) = 16\,\sin(2 \cdot 0.3) = 9.03428$.

Also

$$|f(0.15) - P(f|0, 0.1, 0.2, 0.3)| \leq |x(x - 0.1)(x - 0.2)(x - 0.3)\frac{9.03428}{4!} = 2.117\ldots \cdot 10^{-5} < 2.12 \cdot 10^{-5}.$$

(2)

Bemerkung: Für die Genauigkeit müssten die Eingangswerte eine höhere Genauigkeit haben; zur Vereinfachung hier nur 4-stellig.

GUeb14 A2c) und KGUeb13, zudem Teilmenge von dort A3 mit $f(x) = \ln(1+x)$

Aufgabe 8 $4 + 2 = 6$ Punkte

Zur Bestimmung des Integrals $I = \int_a^b f(x)\,dx$ sei folgende Quadraturformel mit 2 Stützstellen gegeben ($H = b - a$):

$$I \approx I_2(f) = \frac{H}{2}\left[f\left(a + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)H\right) + f\left(a + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)H\right)\right]. \qquad (1)$$

Der Fehler dieser Formel ist gegeben durch

$$E_2(f) = I - I_2(f) = \frac{H^5}{4320} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in (a,b). \qquad (2)$$

a) Leiten Sie für die Quadraturformel (1) die summierte Formel für n Teilintervalle mit der Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$ her und geben Sie für diese eine Fehlerabschätzung unter Benutzung von (2) an.

b) Wie viele Teilintervalle sind höchstens erforderlich, um mit der in a) aufgestellten Formel das Integral $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ bis auf einen Fehler von maximal $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$ zu bestimmen?

Lösung (sehr ausführlich)

a) Auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ mit $x_i = a + i\,h$, $h = \frac{b-a}{n}$, lautet die Quadraturformel (1)

$$\frac{h}{2}\left[f\left(x_i + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right) + f\left(x_i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h\right)\right] = \frac{h}{2}\left[f(s_i) + f(t_i)\right],$$

wobei

$$s_i := a + \left(i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, \qquad t_i := a + \left(i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h.$$

Damit ergibt sich aufsummiert für alle Intervalle $i = 0, 1, \ldots, n-1$

$$I_2^{sum}(f) = I_2^{sum}(f,h,n) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(s_i) + f(t_i)) = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(a + \left(i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h) + f(a + \left(i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h)\right).$$

Für den Fehler gilt gem. (2) auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$

$$\frac{h^5}{4320} f^{(4)}(z_i), \qquad z_i \in (x_i, x_{i+1}),$$

also aufsummiert

$$E_2^{sum}(f) = E_2^{sum}(f,h,n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^5}{4320} f^{(4)}(z_i) = \frac{h^5}{4320}\sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(z_i).$$

Wir schätzen die 4. Ableitung jeweils gegen das auf $[a,b]$ globale Maximum $M_4 := \max_{z\in[a,b]} |f^{(4)}(z)|$ ab und erhalten

$$|E_2^{sum}(f)| \le n\,\frac{h^5}{4320}\,M_4 = \frac{b-a}{4320}\,h^4\,M_4 = \frac{(b-a)^5}{4320}\,\frac{1}{n^4}\,M_4.$$

(4)

b) Für die Fehlerabschätzung berechnen wir die Ableitungen von f:

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f'''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}.$$

Die 4. Ableitung ist auf $[0,1]$ positiv und streng monoton fallend; ihr Betrag nimmt daher ihr Maximum am linken Intervallrand an, also

$$M_4 = f^{(4)}(0) = 24.$$

Für den Fehler gilt

$$|E_2^{sum}(f)| \le \frac{(b-a)^5}{4320}\,\frac{1}{n^4}\,M_4 \overset{!}{\le} \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}.$$

Aufgelöst nach n ergibt sich

$$n \ge \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5\,M_4}{4320\,\varepsilon}} = 10.2\ldots,$$

also aufgerundet

$$n \ge 11.$$

(2)