Aufgabe 1 (2+1+1+1+1 = 6 Punkte)

Es sei $\alpha \in [-1,1]$ eine Konstante, sowie

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 12 & 4 & -12 \\ 6 & 2-\alpha & 6\alpha - 2 \end{pmatrix}.$$

1a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung von A, d.h. $PA(\alpha) = L(\alpha)R(\alpha)$, und geben Sie den Wert $\max_{\alpha\in[-1,1]} \|R(\alpha)\|_1$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\max_{\alpha\in[-1,1]} \|R(\alpha)\|_1$	26	144	2α	121	128	7	-4	30	102	48

LR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 12 & 4 & -12 \\ 6 & 2-\alpha & 6\alpha - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Pivot}(2,1,3)} \begin{pmatrix} 12 & 4 & -12 \\ 9 & 1 & -1 \\ 6 & 2-\alpha & 6\alpha - 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 12 & 4 & -12 \\ \frac{3}{4} & -2 & 8 \\ \frac{1}{2} & -\alpha & 6\alpha+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 12 & 4 & -12 \\ \frac{3}{4} & -2 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{\alpha}{2} & 2\alpha+4 \end{pmatrix}$$

also

$$L(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.75 & 1 & 0 \\ 0.5 & \frac{\alpha}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad R(\alpha) = \begin{pmatrix} 12 & 4 & -12 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2\alpha+4 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\max_{\alpha\in[-1,1]} \|R(\alpha)\|_1 = \max_{\alpha\in[-1,1]} [\max\{12, 6, 20 + |2\alpha+4|\}] = 26$$

Es seien nun

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0.5 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \ \hat{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -0.5 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}, \ \hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} -9.5 \\ -5 \\ 0.5 + 8.5\alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in [-1,1]$. Dabei sind $\hat{L}$, $\hat{R}$ und $\hat{P}$ die Matrizen der LR-Zerlegung von C, d.h. $\hat{P}C = \hat{L}\hat{R}$. Wir lösen das Gleichungssystem $Cx = b$ mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

1b) Bestimmen Sie mittels Vorwärtseinsetzen y_3, wobei $\hat{L}y = \hat{P}b$ gilt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
y_3	$3 + 14\,\alpha$	$2 + 24\,\alpha$	$1 + 10\,\alpha$	2	9	$0.5 + 3\,\alpha$	7	13	1.5	$10\,\alpha$

Vorwärtseinsetzen:

$$\hat{L}\,y = P\,b \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & -9.5 \\ 0.5 & -\alpha & 1 & 0.5 + 8.5\,\alpha \end{array}\right) \downarrow \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5.5 \\ 3 + 14\,\alpha \end{pmatrix}.$$

1c) Eine andere rechte Seite führt auf $y = (-6, 6, 3\,\alpha + 3)^T$. Bestimmen Sie mittels Rückwärtseinsetzen $\sum_i x_i$, wobei $\hat{R}x = y$ gilt. Dabei nehmen wir an, dass $\hat{R}$ invertierbar ist.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_i x_i$	4	2	1	3	9	-4.2	12	$2 + 4\,\alpha$	-4	$1 + 10\,\alpha$

Rückwärtseinsetzen ($\alpha \neq -1$):

$$\hat{R}\,x = y \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & -0.5 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 3\,\alpha + 3 \end{array}\right) \uparrow \longrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist das Polynom zweiten Grades

$$p(x) = a + bx + cx^2 \qquad \text{mit} \qquad p(50) = 100, \quad p(51) = 0, \quad p(52) = -102.$$

In der klassischen Monombasis führt dies auf das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 50 & 2500 \\ 1 & 51 & 2601 \\ 1 & 52 & 2704 \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ -102 \end{pmatrix}}_{=:z}.$$

Hinweis: Es gilt

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1326 & -2600 & 1275 \\ -51.5 & 102 & -50.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

1d) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa_\infty(B)$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\kappa_\infty(B)$	14339157	15480241	15333578	1553	39277	15789241	3131645	6484763	15357	65498731

Es gilt

$$\kappa_\infty(B) = \|B\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty = (1 + 52 + 2704)(1326 + 2600 + 1275) = 2757 \cdot 5201 = 14339157$$

1e) Eine Approximation der Kondition hat $\kappa_\infty(B) = 1836000$ ergeben. Verwenden Sie diese Approximation für die folgende Aufgabe: Angenommen, die rechte Seite z ist mit einem absoluten Fehler von 0.5 in der ∞-Norm behaftet. Schätzen Sie den relativen Fehler $r_{(a,b,c)}$ in den Koeffizienten $(a, b, c)^T$ in der ∞-Norm ab.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$r_{(a,b,c)}$	9000	8000	4200	6300	9400	6000	9600	8100	7800	10200

Wir erhalten

$$\begin{aligned} r_{(a,b,c)} = \frac{\|\delta(a,b,c)^T\|_\infty}{\|(a,b,c)^T\|_\infty} &\leq \kappa_\infty(B) \cdot \frac{0.5}{\|(100, 0, -102)^T\|_\infty} \\ &= 1836000 \cdot \frac{1}{204} \\ &= 9000 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (2+1+1+1 = 5 Punkte)

Die Funktion

$$y(t) := \alpha(-112\,t^2 + 127\,t - 15) + \beta(12\,t^2 - 19\,t) - 5$$

soll im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimal an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	0	1	2
y_i	-10	-5	13

Bestimmen Sie die Parameter α und β optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate:

2a) Bestimmen Sie zu dem entsprechenden linearen Ausgleichsproblem $x^* = \mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ die Matrix $A = (A_{ij})$ und den Vektor $b = (b_i)$. Geben Sie $\sum_{i,j} |A_{ij}| + \sum_i |b_i|$an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_{i,j} \lvert A_{ij}\rvert + \sum_i \lvert b_i\rvert$	264	269	312	390	234	198	202	378	245	277

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & -7 \\ -209 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad \to \quad \sum_{i,j} |A_{ij}| + \sum_i |b_i| = 241 + 23 = 264$$

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $x^* = \mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}} \|Bx - c\|_2$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 7.5 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Beim Lösen des linearen Ausgleichsproblems mit Hilfe einer Householder-Transformation wird $(B|c)$ in $(B^{(1)}|c^{(1)})$ überführt.

2b) Berechnen Sie $(B^{(1)}|c^{(1)})$ und geben Sie $s^{(1)} = \sum_{i,j} B^{(1)}_{ij} + \sum_i c^{(1)}_i$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$s^{(1)}$	25.5	-6	6.5	-12.5	23	1	-2	8	5	-9

	10	-12	
	0	20	
	7.5	6	$\alpha_1 = 12.5$
22.5 0 7.5	(281.25)	-225	$\beta_1 = \frac{4}{1125}$
$\frac{2}{25}$	-12.5	6	-0.48
0	0	20	
$\frac{2}{75}$	0	12	$res = 23.324$

Man findet also $x^* = -6/12.5 = -0.48$ und es gilt $s^{(1)} = -12.5 + 38 = 25.5$.

2c) Geben Sie die Lösung x^* an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x^*	-0.48	-0.12	1.2	3.9	0.39	-4.6	-0.24	0.5	-1.3	-7.9

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $x^* = \mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}} \|Cx - d\|_2$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 29 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -45 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

2d) Geben Sie die Norm des Residuums, d.h. $\|Cx^* - d\|_2$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|Cx^* - d\|_2$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{39}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{47}$	$\sqrt{35}$	$\sqrt{28}$	$\sqrt{42}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{26}$

Das Residuum ist durch $\|Cx^* - d\|_2 = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ gegeben.

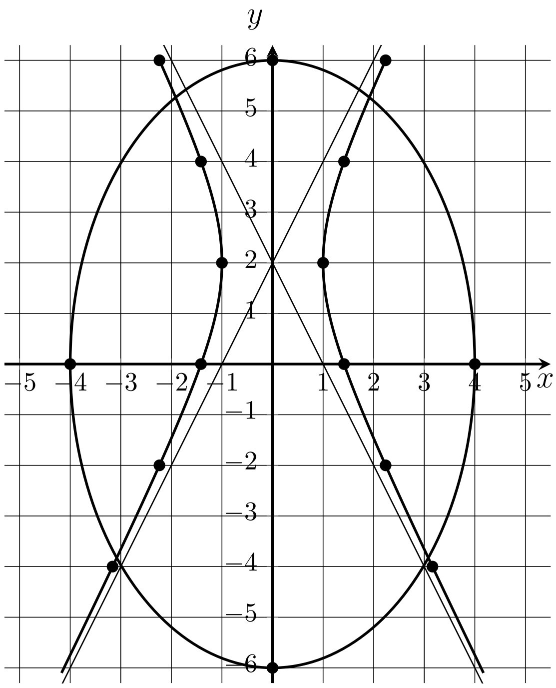
Aufgabe 3 (2+2+1+2+1 = 8 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$f(\mathbf{x}) = f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{36} - 1 \\ x^2 - \dfrac{y^2}{4} + y - 2 \end{pmatrix} = 0$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

3a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).



Ellipse in Normallage mit Hauptachsen $a = 4$ und $b = 6$ sowie Hyperbel $x^2 - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ mit Asymptoten $y = 2 \pm 2\,x$ oder Wertetabelle zu $x = \pm\sqrt{2 + y^2/4 - y}$.
Zu skizzieren ist der **gesamte** Bereich mit den vier Startwerten.
Startwerte:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

.

3b) Benutzen Sie als Startwert für die Nullstelle im 1. Quadranten $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie dazu $r^0 := -f(\mathbf{x}^0)$ sowie $J^0 := f'(\mathbf{x}^0)$ und geben sie $S^0 := \sum_{ij} J^0_{ij} + \sum_i r^0_i$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
S^0	−5.1667	−21.667	−25.167	−12.667	−3.1667	−4.6667	−5.1667	−19.667	−9.1667	−3.6667

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{x}{8} & \frac{y}{18} \\ 2\,x & 1 - \frac{y}{2} \end{pmatrix} \to (J^0|r^0) = (f'(\mathbf{x}^0)| - f(\mathbf{x}^0)) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -1 \\ 8 & -2 & -11 \end{array}\right) \to S^0 := \sum_{ij} J^0_{ij} + \sum_i r^0_i = -5.1667$$

Für eine andere Funktion: $$g(\mathbf{x}) = g(x,y) = \begin{pmatrix} 4\,y^2 - x^2 - 4\,x - 36 \\ y + x^2 - 5 \end{pmatrix} \to g'(x,y) = \begin{pmatrix} -2\,x - 4 & 8\,y \\ 2\,x & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich zum Startwert: $$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad g(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} -16 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g'(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 0 & -16 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3c) Berechnen Sie zu obigen g und Startwert $\mathbf{x}^0$ die erste Iterierte $\mathbf{x}^1$ mit dem Newton-Verfahren und geben Sie $||\mathbf{x}^1||_1$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\lVert\mathbf{x}^1\rVert_1$	6	5	7	8	4	3	2	5.5	6.5	4.5

Newton-Verfahren:

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -16 & 16 \\ -4 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \Delta\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \to ||\mathbf{x}^1||_1 = 6$$

3d) Berechnen Sie zu obigen g und Startwert $\mathbf{x}^0$ die zweite Iterierte $\mathbf{x}^2$ mit dem Newton-Verfahren und geben Sie $||\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1||_2$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\lvert\lvert\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\rvert\rvert_2$	0.23662	0.64815	1.1667	0.66667	0.36548	0.72834	0.58325	0.18932	0.32597	0.17943

Newton-Verfahren:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -24 & | & -3 \\ -6 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -24 & | & -3 \\ 0 & -71 & | & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0.190141 \\ 0.140845 \end{pmatrix} \left(\rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2.80986 \\ -2.85915 \end{pmatrix} \right) \rightarrow ||\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1||_2 = ||\Delta\mathbf{x}^1||_2 = 0.236624$$

3e) Berechnen Sie zu obigen g und Startwert $\mathbf{x}^0$ die zweite Iterierte $\mathbf{x}^2$ mit dem vereinfachten Newton-Verfahren und geben Sie $||\mathbf{x}^2||_1$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\lvert\lvert\mathbf{x}^2\rvert\rvert_1$	5.5156	3	4.5	4.6667	3.1667	4.5156	6	3.4142	5	3.1623

Vereinfachtes Newton-Verfahren (erster Schritt und $g(\mathbf{x}^1)$ vom Newton-Verfahren):

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -16 & | & -3 \\ -4 & 1 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.296875 \\ 0.1875 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2.703125 \\ -2.8125 \end{pmatrix} \rightarrow ||\mathbf{x}^2||_1 = 5.51562$$

Aufgabe 4 (1+2+1+1+1 = 6 Punkte)

Gegeben sei eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man kann $f'(x)$ mit

$$f_h^{(1)}(x) := \frac{f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})}{h}$$

für ein $x \in \mathbb{R}$ und $h > 0$ hinreichend klein approximieren.

4a) Angenommen f lässt sich für alle $x \in \mathbb{R}$ exakt auswerten. Weiterhin gelte $\|f^{(3)}\|_\infty \leq 2.5$. Geben Sie eine bestmögliche obere Schranke für h an, so dass sich f' auf $\varepsilon = 0.1$ genau bestimmen lässt?
Hinweis: Es gilt $|f_h^{(1)}(x) - f'(x)| \leq \frac{h^2}{24} \cdot \max_{y\in[x-h/2,x+h/2]} |f^{(3)}(y)|$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$h \leq$	0.97980	1.69706	0.82436	2.75732	1.89392	0.32125	3.64325	0.57568	0.01552	1.44561

Es gilt:

$$|f_h^{(1)}(x) - f'(x)| \leq \frac{h^2}{24} \cdot \|f^{(3)}\|_\infty \leq \frac{h^2}{24} \cdot 2.5 \leq \varepsilon = 0.1.$$

Stellt man das nach h um, so erhält man:

$$h \leq \sqrt{24 \cdot \varepsilon \frac{1}{2.5}}.$$

Setzt man $\varepsilon = 0.1$ ein, so erhält man $h \leq 0.97980$.

4b) Wir nehmen nun an, dass sich f nicht länger exakt auswerten lässt. Der absolute Rundungsfehler beläuft sich dabei auf $\sigma = 10^{-3}$, d.h. $|\tilde{f}(y) - f(y)| \leq \sigma$. Des Weiteren sei bekannt, dass $\|f^{(3)}\|_\infty \leq 4$. Bestimmen Sie nun $h > 0$, so dass der Fehler $|\tilde{f}_h^{(1)}(x) - f'(x)|$ minimal wird.
Hinweis: Benutzen Sie die Dreiecks-Ungleichung und den Hinweis aus 4a). Weiterhin gilt für Funktionen der Form $g(h) = a \cdot h^2 + \frac{b}{h}$ mit $h > 0$, dass $g'(h) = 0 \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{b}{2a}}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$h =$	0.18171	0.14422	0.08956	0.05981	0.25710	0.68696	0.59327	0.54331	0.51223	0.37390

Zunächst muss man seine Fehlerabschätzung anpassen:

$$\begin{aligned}|f_h^{(1)}(x) - f'(x)| &= |\tilde{f}_h^{(1)}(x) - f_h^{(1)}(x) + f_h^{(1)}(x) - f'(x)| \\ &\leq |\tilde{f}_h^{(1)}(x) - f_h^{(1)}(x)| + |f_h^{(1)}(x) - f'(x)| \\ &\leq \frac{2\sigma}{h} + \frac{h^2}{24} \cdot 4 =: g(h).\end{aligned}$$

Nun kann man den 2.Hinweis nutzen und erhält

$$h = \sqrt[3]{\frac{2\sigma}{2\frac{4}{24}}} = \sqrt[3]{\frac{24\sigma}{4}}.$$

Es gilt also $h = 0.18171$.

4c) Sei nun $f(x) = \ln(x)$ mit $x \in [1,5]$. Weiterhin seien die Stützstellen $x_0 = 1,\ x_1 = 3,\ x_2 = 5$ vorgegeben. Schätzen Sie $E = \|f - P(f|x_0,x_1,x_2)\|_\infty$ bestmöglich nach oben ab.
Hinweis: Für das zugehörige Knotenpolynom gilt $\max_{x\in[1,5]} |\omega(x)| \leq 3.1$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$E \leq$	1.03333	2.06667	3.25662	5.32119	3.75007	10.8923	11.3210	1.66897	8.47331	1.50000

Der Fehler kann abgeschätzt werden durch $\max_{x\in[x_0,x_2]} \prod_j |(x - x_j)| \cdot \max_{\xi\in[x_0,x_2]} \frac{|f^{(3)}(\xi)|}{3!}$. Zunächst berechnen wir die dritte Ableitung des Logarithmus:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Es folgt, dass $\|f^{(3)}\|_\infty = 2$.

Schließlich erhalten wir durch Einsetzen in obige Fehlerformel $E \leq 2 \cdot 3.1 \cdot \dfrac{1}{6} = 1.03333$.

4d) Gegeben sei nun folgendes Tableau:

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_0 = 1 & 0 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_1 = 3 & 1.0986 & \rightarrow & 0.5493 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
x_2 = 5 & 1.6094 & \rightarrow & [x_1, x_2]f & \rightarrow & [x_0, x_1, x_2]f
\end{array} .$$

Berechnen Sie den fehlenden Wert $[x_0, x_1, x_2]f$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$[x_0, x_1, x_2]f =$	-0.07348	-0.14694	0.00210	0.2554	-0.0210	0.6487	0.27478	-0.5221	-0.6487	-0.27478

Es gilt $[x_1, x_2]f = 0.2554$ und $[x_0, x_1, x_2]f = -0.07348$.

4e) Stellen Sie das Interpolationspolynom p zweiten Grades zu folgendem Tableau auf:

$$\begin{array}{c|ccccc}
x_0 = -1 & 0 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_1 = 0 & 1 & \rightarrow & 1 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
x_2 = 2 & 2 & \rightarrow & \frac{1}{2} & \rightarrow & -\frac{1}{6}
\end{array} .$$

Berechnen Sie nun $p'(1)$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$p'(1) =$	0.5	1.0	-0.5	-0.6667	0.25	-1.5	-0.3333	0.125	0.8333	0.3333

Benutze die Werte aus dem Tableau, um das Polynom aufzustellen:

$$p(x) = 0 + 1 \cdot (x - (-1)) + (-\frac{1}{6}) \cdot (x - (-1)) \cdot (x - 0) = 1 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}x^2.$$

Entsprechend gilt:

$$p'(x) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}x \Rightarrow p'(1) = 0.5.$$

Aufgabe 5 (1+1+1+1+1 = 5 Punkte)

Gegeben sei eine Quadraturformel $Q(f) := a_0 f(-1) + a_1 f(0) + a_2 f(1)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$.

5a) Bestimmen Sie a_0, sodass die Formel einen möglichst hohen Exaktheitsgrad besitzt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$a_0 =$	0.33333	0.66667	1.0	0.25	0.75	0.23	0.44	0.1	0.15	0.16667

Zunächst stellen wir die Lagrange-Basis-Polynome auf:

$$p_0(x) = \frac{(x-0)\cdot(x-1)}{((-1)-0)\cdot((-1)-1)} = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$
$$p_1(x) = \frac{(x-(-1))\cdot(x-1)}{(0-(-1))\cdot(0-1)} = -x^2 + 1$$
$$p_2(x) = \frac{(x-(-1))\cdot(x-0)}{(1-(-1))\cdot(1-0)} = \frac{1}{2}(x^2 + x)$$

Nun gilt für die Gewichte: $a_i = \int_{-1}^{1} p_i(x)\mathrm{dx}$. Es folgt für a_0

$$a_0 = \int_{-1}^{1} p_0(x)\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - (-\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}\Big)$$
$$= \frac{1}{3} = 0.333333.$$

5b) Bestimmen Sie a_1, sodass die Formel einen möglichst hohen Exaktheitsgrad besitzt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$a_1 =$	1.33333	2.66667	1.0	1.83333	0.66667	2.0	−1.2	1.66667	−0.25	2.25

Analog berechnet man auch a_1:

$$a_1 = \int_{-1}^{1} p_1(x)\mathrm{dx} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 2$$
$$= \frac{4}{3} = 1.333333.$$

5c) Sei nun $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar mit $\|f^{(3)}\|_\infty \leq 1$. Wie groß ist der durch die obige Quadraturformel $Q(f)$ erzeugte Fehler maximal? Verwenden Sie dabei die Interpolationsfehlerabschätzung $|f(\hat{x}) - P(f|x_0, x_1, x_2)(\hat{x})| \leq |\prod_{j=0}^{n}(\hat{x} - x_j)| \cdot \max_{y\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!}$, $\hat{x} \in [a, b]$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\lvert\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{dx} - Q(f)\rvert \leq$	0.12830	2.05280	0.76981	0.3849	0.9815	1.5338	1.234	0.15	0.19245	0.58872

Es gilt:

$$\Big|\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{dx} - Q(f)\Big| = \Big|\int_{-1}^{1} f(x) - P(f|-1,0,1)(x)\mathrm{dx}\Big|$$
$$\leq \int_{-1}^{1} |f(x) - P(f|-1,0,1)(x)|\mathrm{dx} \leq 2\cdot \max_{x\in[-1,1]}|x(x-1)(x+1)| \cdot \max_{x\in[-1,1]} \frac{|f^{(3)}(x)|}{3!}$$
$$\leq 2\cdot \max_{x\in[-1,1]}|x^3 - x| \cdot \frac{1}{6} \leq 2\cdot 0.38490018 \cdot \frac{1}{6} = 0.12830$$

5d) Sei nun $f(x) = 2\cdot\cos(x)$. Berechnen Sie $\int_0^2 f(x)\mathrm{dx}$ mit der Simpson-Regel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$I_2(f) =$	1.83004	2.74506	0.91502	0.5	1.2193	1.37253	0.90930	0.53429	1.0	0.045558

Es gilt:

$$\begin{aligned} Q(f) &= 2\left(\frac{1}{6}f(0)+\frac{4}{6}f(1)+\frac{1}{6}f(2)\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\cos(1)+\frac{1}{3}\cos(2)\right) = 1.83004. \end{aligned}$$

5e) Wie viele Teilintervalle N des Intervalls $[0,1]$ werden benötigt, um mit der summierten Mittelpunktsregel das Integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}$ bis auf $\varepsilon = 0.01$ zu bestimmen, wenn $\|f^{(2)}\|_\infty \leq 2$ gilt?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$N =$	3	5	1	2	7	8	12	15	9	16

Für die summierte Mittelpunkts-Regel gilt:

$$|\int_0^1 f(x)\mathrm{dx} - Q(f)| \leq \frac{h^2}{24}\cdot\|f^{(2)}\|_\infty \leq \frac{h^2}{24}\cdot 2 \leq 0.01 = \varepsilon$$

Daraus folgt

$$h^2 \leq 0.12 \Rightarrow h \leq \sqrt{0.12}.$$

Also gilt $N \geq \frac{1}{\sqrt{0.12}} \geq 2.8867$ $(\geq 2.8\ldots)$. Es folgt, dass man 3 Teilintervalle benötigt.