Aufgabe 1 (2+1+1+1+1 = 6 Punkte)

Es sei $\alpha \in [-1,1]$ eine Konstante, sowie

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 12 & 4 & -12 \\ 6 & 2-\alpha & 6\alpha - 2 \end{pmatrix}.$$

1a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung von A, d.h. $PA(\alpha) = L(\alpha)R(\alpha)$, und geben Sie den Wert $\max_{\alpha\in[-1,1]} |\det(R(\alpha))|$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\max_{\alpha\in[-1,1]} \lvert\det(R(\alpha))\rvert$	26	144	2α	121	128	7	-4	30	102	48

LR-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 12 & 4 & -12 \\ 6 & 2-\alpha & 6\alpha-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Pivot}(2,1,3)} \begin{pmatrix} 12 & 4 & -12 \\ 9 & 1 & -1 \\ 6 & 2-\alpha & 6\alpha-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 12 & 4 & -12 \\ \frac{3}{4} & -2 & 8 \\ \frac{1}{2} & -\alpha & 6\alpha+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 12 & 4 & -12 \\ \frac{3}{4} & -2 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{\alpha}{2} & 2\alpha+4 \end{pmatrix}$$

also

$$L(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.75 & 1 & 0 \\ 0.5 & \frac{\alpha}{2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad R(\alpha) = \begin{pmatrix} 12 & 4 & -12 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2\alpha+4 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\max_{\alpha\in[-1,1]} |\det(R(\alpha))| = \max_{\alpha\in[-1,1]} 12 \cdot 2 \cdot |2\alpha+4| = 144$$

Es seien nun

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0.5 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \ \hat{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & -0.5 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{pmatrix}, \ \hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ -0.5 + 19\,\alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in [-1,1]$. Dabei sind $\hat{L}$, $\hat{R}$ und $\hat{P}$ die Matrizen der LR-Zerlegung von C, d.h. $\hat{P}\,C = \hat{L}\hat{R}$. Wir lösen das Gleichungssystem $Cx = b$ mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen.

1b) Bestimmen Sie mittels Vorwärtseinsetzen y_3, wobei $\hat{L}y = \hat{P}b$ gilt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
y_3	$3+14\,\alpha$	$2+24\,\alpha$	$1+10\,\alpha$	2	9	$0.5+3\,\alpha$	7	13	1.5	$10\,\alpha$

Vorwärtseinsetzen:

$$\hat{L}\,y = P\,b \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & -10 \\ 0.5 & -\alpha & 1 & -0.5+19\,\alpha \end{array}\right) \downarrow \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 2+24\,\alpha \end{pmatrix}.$$

1c) Eine andere rechte Seite führt auf $y = (-12, 6, 3\,\alpha+3)^T$. Bestimmen Sie mittels Rückwärtseinsetzen $\sum_i x_i$, wobei $\hat{R}x = y$ gilt. Dabei nehmen wir an, dass $\hat{R}$ invertierbar ist.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_i x_i$	4	2	1	3	9	-4.2	12	$2+4\,\alpha$	-4	$1+10\,\alpha$

Rückwärtseinsetzen ($\alpha \neq -1$):

$$\hat{R}\,x = y \quad \longrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & -12 \\ 0 & -0.5 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 3\,\alpha+3 \end{array}\right) \uparrow \longrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist das Polynom zweiten Grades

$$p(x) = a + bx + cx^2 \qquad \text{mit} \qquad p(51) = 102, \quad p(52) = 0, \quad p(53) = -104.$$

In der klassischen Monombasis führt dies auf das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 51 & 2601 \\ 1 & 52 & 2704 \\ 1 & 53 & 2809 \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 102 \\ 0 \\ -104 \end{pmatrix}}_{=:z}.$$

Hinweis: Es gilt

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1378 & -2703 & 1326 \\ -52.5 & 104 & -51.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

1d) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa_\infty(B)$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\kappa_\infty(B)$	14339157	15480241	15333578	1553	39277	15789241	3131645	6484763	15357	65498731

Es gilt

$$\kappa_\infty(B) = \|B\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty = (1 + 53 + 2809)(1378 + 2703 + 1326) = 2863 \cdot 5407 = 15480241$$

1e) Eine Approximation der Kondition hat $\kappa_\infty(B) = 1664000$ ergeben. Verwenden Sie diese Approximation für die folgende Aufgabe: Angenommen, die rechte Seite z ist mit einem absoluten Fehler von 0.5 in der ∞-Norm behaftet. Schätzen Sie den relativen Fehler $r_{(a,b,c)}$ in den Koeffizienten $(a, b, c)^T$ in der ∞-Norm ab.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$r_{(a,b,c)}$	9000	8000	4200	6300	9400	6000	9600	8100	7800	10200

Wir erhalten

$$\begin{aligned} r_{(a,b,c)} = \frac{\|\delta(a,b,c)^T\|_\infty}{\|(a,b,c)^T\|_\infty} &\leq \kappa_\infty(B) \cdot \frac{0.5}{\|(102, 0, -104)^T\|_\infty} \\ &= 1664000 \cdot \frac{1}{208} \\ &= 8000 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (2+1+1+1 = 5 Punkte)

Die Funktion

$$y(t) := \alpha(-112\,t^2 + 127\,t - 15) + \beta(13\,t^2 - 17\,t) - 8$$

soll im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate optimal an folgende Messwerte angepasst werden:

t_i	0	1	2
y_i	-11	-8	12

Bestimmen Sie die Parameter α und β optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate:

2a) Bestimmen Sie zu dem entsprechenden linearen Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ die Matrix $A = (A_{ij})$ und den Vektor $b = (b_i)$. Geben Sie $\sum_{i,j} |A_{ij}| + \sum_i |b_i|$an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\sum_{i,j} \|A_{ij}\| + \sum_i \|b_i\|$	264	269	312	390	234	198	202	378	245	277

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & -4 \\ -209 & 18 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \to \quad \sum_{i,j} |A_{ij}| + \sum_i |b_i| = 246 + 23 = 269$$

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}} \|Bx - c\|_2$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Beim Lösen des linearen Ausgleichsproblems mit Hilfe einer Householder-Transformation wird $(B|c)$ in $(B^{(1)}|c^{(1)})$ überführt.

2b) Berechnen Sie $(B^{(1)}|c^{(1)})$ und geben Sie $s^{(1)} = \sum_{i,j} B^{(1)}_{ij} + \sum_i c^{(1)}_i$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$s^{(1)}$	25.5	-6	6.5	-12.5	23	1	-2	8	5	-9

$$\begin{array}{ccc||c|c||l}
 & & & 20 & -6 & \\
 & & & 0 & 10 & \\
 & & & 15 & 3 & \alpha_1 = 25 \\
\hline
45 & 0 & 15 & (1125) & -225 & \beta_1 = \frac{1}{1125} \\
\hline
 & & \frac{9}{225} & -25 & 3 & -0.12 \\
 & & 0 & 0 & 10 & \\
 & & \frac{3}{225} & 0 & 6 & res = 11.662 \\
\hline
\end{array}$$

Man findet also $x^* = -3/25 = -0.12$ und es gilt $s^{(1)} = -25 + 19 = -6$.

2c) Geben Sie die Lösung x^* an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x^*	-0.48	-0.12	1.2	3.9	0.39	-4.6	-0.24	0.5	-1.3	-7.9

Wir betrachten nun das Ausgleichsproblem $x^* = \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}} \|Cx - d\|_2$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -69 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

2d) Geben Sie die Norm des Residuums, d.h. $\|Cx^* - d\|_2$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|Cx^* - d\|_2$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{34}$	$\sqrt{39}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{47}$	$\sqrt{35}$	$\sqrt{28}$	$\sqrt{42}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{26}$

Das Residuum ist durch $\|Cx^* - d\|_2 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$ gegeben.

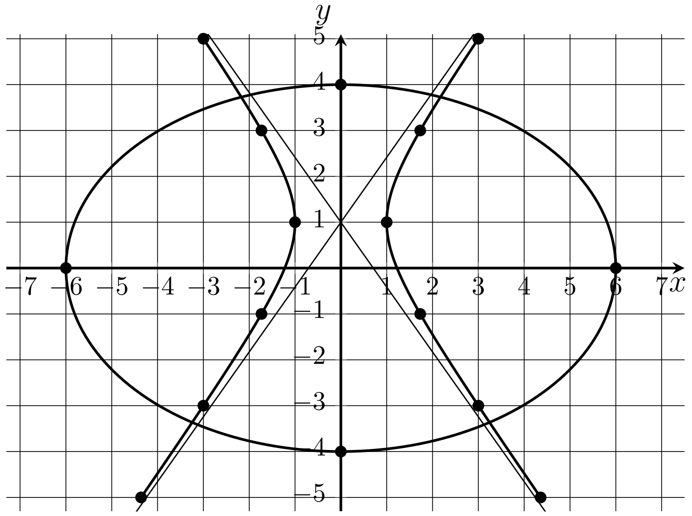
Aufgabe 3 (2+2+1+2+1 = 8 Punkte)

Die Lösungen des Gleichungssystems

$$f(\mathbf{x}) = f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} - 1 \\ x^2 - \dfrac{y^2}{2} + y - \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} = 0$$

sollen iterativ mit dem Newton- und dem vereinfachten Newton-Verfahren für Systeme bestimmt werden.

3a) Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, aus der die Lage **aller** Nullstellen hervorgeht, und geben Sie geeignete Startwerte an (Genauigkeit ± 0.5).



Ellipse in Normallage mit Hauptachsen $a = 6$ und $b = 4$ sowie Hyperbel $x^2 - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$ mit Asymptoten $y = 1 \pm \sqrt{2}\,x$ oder Wertetabelle zu $x = \pm\sqrt{\frac{y^2}{2} - y + \frac{3}{2}}$. Zu skizzieren ist der **gesamte** Bereich mit den vier Startwerten. Startwerte:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -3 \\ -3.5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 3 \\ -3.5 \end{pmatrix}$$

.

3b) Benutzen Sie als Startwert für die Nullstelle im 1. Quadranten $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie dazu $r^0 := -f(\mathbf{x}^0)$ sowie $J^0 := f'(\mathbf{x}^0)$ und geben sie $S^0 := \sum_{ij} J^0_{ij} + \sum_i r^0_i$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
S^0	−5.1667	−21.667	−25.167	−12.667	−3.1667	−4.6667	−5.1667	−19.667	−9.1667	−3.6667

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{x}{18} & \frac{y}{8} \\ 2\,x & 1-y \end{pmatrix} \to (J^0|r^0) = (f'(\mathbf{x}^0)| - f(\mathbf{x}^0)) = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \\ 12 & -3 & -30.5 \end{array}\right) \to S^0 := \sum_{ij} J^0_{ij} + \sum_i r^0_i = -21.667$$

Für eine andere Funktion:
$$g(\mathbf{x}) = g(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + 3\,x\,y - 6 \\ y^2 + 1.5\,x^2 - 18 \end{pmatrix} \to g'(x,y) = \begin{pmatrix} 3\,y & 3\,x + 2\,y \\ 3\,x & 2\,y \end{pmatrix}$$

ergibt sich zum Startwert:
$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g'(\mathbf{x}^0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

3c) Berechnen Sie zu obigen g und Startwert $\mathbf{x}^0$ die erste Iterierte $\mathbf{x}^1$ mit dem Newton-Verfahren und geben Sie $||\mathbf{x}^1||_1$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|\|\mathbf{x}^1\|\|_1$	6	5	7	8	4	3	2	5.5	6.5	4.5

Newton-Verfahren:

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -6 & 6 \\ -6 & 0 & 12 \end{array}\right) \to \Delta\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \to ||\mathbf{x}^1||_1 = 5$$

3d) Berechnen Sie zu obigen g und Startwert $\mathbf{x}^0$ die zweite Iterierte $\mathbf{x}^2$ mit dem Newton-Verfahren und geben Sie $||\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1||_2$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|\|\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1\|\|_2$	0.23662	0.64815	1.1667	0.66667	0.36548	0.72834	0.58325	0.18932	0.32597	0.17943

Newton-Verfahren:

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -14 & | & -7 \\ -12 & -2 & | & -7 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -12 & -2 & | & -7 \\ 0 & -13.5 & | & -5.25 \end{pmatrix} \to \Delta\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 0.518519 \\ 0.388889 \end{pmatrix} \left(\to \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -3.48148 \\ -0.611111 \end{pmatrix} \right) \to ||\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^1||_2 = ||\Delta\mathbf{x}^1||_2 = 0.648148$$

3e) Berechnen Sie zu obigen g und Startwert $\mathbf{x}^0$ die zweite Iterierte $\mathbf{x}^2$ mit dem vereinfachten Newton-Verfahren und geben Sie $||\mathbf{x}^2||_1$ an.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\|\|\mathbf{x}^2\|\|_1$	5.5156	3	4.5	4.6667	3.1667	4.5156	6	3.4142	5	3.1623

Vereinfachtes Newton-Verfahren (erster Schritt und $g(\mathbf{x}^1)$ vom Newton-Verfahren):

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -6 & | & -7 \\ -6 & 0 & | & -7 \end{pmatrix} \to \Delta\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1.16667 \\ 1.16667 \end{pmatrix} \to \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} -2.83333 \\ 0.166667 \end{pmatrix} \to ||\mathbf{x}^2||_1 = 3$$

Aufgabe 4 (1+2+1+1+1 = 6 Punkte)
Gegeben sei eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man kann $f'(x)$ mit

$$f_h^{(1)}(x) := \frac{f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2})}{h}$$

für ein $x \in \mathbb{R}$ und $h > 0$ hinreichend klein approximieren.

4a) Angenommen f lässt sich für alle $x \in \mathbb{R}$ exakt auswerten. Weiterhin gelte $\|f^{(3)}\|_\infty \leq 2.5$. Geben Sie eine bestmögliche obere Schranke für h an, so dass sich f' auf $\varepsilon = 0.3$ genau bestimmen lässt?
Hinweis: Es gilt $|f_h^{(1)}(x) - f'(x)| \leq \frac{h^2}{24} \cdot \max_{y\in[x-h/2,x+h/2]} |f^{(3)}(y)|$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$h \leq$	0.97980	1.69706	0.82436	2.75732	1.89392	0.32125	3.64325	0.57568	0.01552	1.44561

Es gilt:

$$|f_h^{(1)}(x) - f'(x)| \leq \frac{h^2}{24} \cdot \|f^{(3)}\|_\infty \leq \frac{h^2}{24} \cdot 2.5 \leq \varepsilon = 0.1.$$

Stellt man das nach h um, so erhält man:

$$h \leq \sqrt{24 \cdot \varepsilon \frac{1}{2.5}}.$$

Setzt man $\varepsilon = 0.3$ ein, so erhält man $h \leq 1.69706$.

4b) Wir nehmen nun an, dass sich f nicht länger exakt auswerten lässt. Der absolute Rundungsfehler beläuft sich dabei auf $\sigma = 10^{-3}$, d.h. $|\tilde{f}(y) - f(y)| \leq \sigma$. Des Weiteren sei bekannt, dass $\|f^{(3)}\|_\infty \leq 8$. Bestimmen Sie nun $h > 0$, so dass der Fehler $|\tilde{f}_h^{(1)}(x) - f'(x)|$ minimal wird.
Hinweis: Benutzen Sie die Dreiecks-Ungleichung und den Hinweis aus 4a). Weiterhin gilt für Funktionen der Form $g(h) = a \cdot h^2 + \frac{b}{h}$ mit $h > 0$, dass $g'(h) = 0 \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{b}{2a}}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$h =$	0.18171	0.14422	0.08956	0.05981	0.25710	0.68696	0.59327	0.54331	0.51223	0.37390

Zunächst muss man seine Fehlerabschätzung anpassen:

$$\begin{aligned} |f_h^{(1)}(x) - f'(x)| &= |\tilde{f}_h^{(1)}(x) - f_h^{(1)}(x) + f_h^{(1)}(x) - f'(x)| \\ &\leq |\tilde{f}_h^{(1)}(x) - f_h^{(1)}(x)| + |f_h^{(1)}(x) - f'(x)| \\ &\leq \frac{2\sigma}{h} + \frac{h^2}{24} \cdot 8 =: g(h). \end{aligned}$$

Nun kann man den 2.Hinweis nutzen und erhält

$$h = \sqrt[3]{\frac{2\sigma}{2\frac{8}{24}}} = \sqrt[3]{\frac{24\sigma}{8}}.$$

Es gilt also $h = 0.14422$.

4c) Sei nun $f(x) = 2 \cdot \ln(x)$ mit $x \in [1, 5]$. Weiterhin seien die Stützstellen $x_0 = 1,\ x_1 = 3,\ x_2 = 5$ vorgegeben. Schätzen Sie $E = \|f - P(f|x_0, x_1, x_2)\|_\infty$ bestmöglich nach oben ab.
Hinweis: Für das zugehörige Knotenpolynom gilt $\max_{x\in[1,5]} |\omega(x)| \leq 3.1$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$E \leq$	1.03333	2.06667	3.25662	5.32119	3.75007	10.8923	11.3210	1.66897	8.47331	1.50000

Der Fehler kann abgeschätzt werden durch $\max_{x\in[x_0,x_2]} \prod_j |(x - x_j)| \cdot \max_{\xi\in[x_0,x_2]} \frac{|f^{(3)}(\xi)|}{3!}$. Zunächst berechnen wir die dritte Ableitung des Logarithmus:

$$f'(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow f''(x) = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{4}{x^3}.$$

Es folgt, dass $\|f^{(3)}\|_\infty = 4$.

Schließlich erhalten wir durch Einsetzen in obige Fehlerformel $E \leq 4 \cdot 3.1 \cdot \dfrac{1}{6} = 2.06667$.

4d) Gegeben sei nun folgendes Tableau:

$$
\begin{array}{r|ccccc}
x_0 = 1 & 0 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_1 = 3 & 2.1972 & \rightarrow & 1.0986 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
x_2 = 5 & 3.2189 & \rightarrow & [x_1, x_2]f & \rightarrow & [x_0, x_1, x_2]f
\end{array}
.
$$

Berechnen Sie den fehlenden Wert $[x_0, x_1, x_2]f$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$[x_0, x_1, x_2]f =$	-0.07348	-0.14694	0.00210	0.2554	-0.0210	0.6487	0.27478	-0.5221	-0.6487	-0.27478

Es gilt $[x_1, x_2]f = 0.51085$ und $[x_0, x_1, x_2]f = -0.146937$.

4e) Stellen Sie das Interpolationspolynom p zweiten Grades zu folgendem Tableau auf:

$$
\begin{array}{r|ccccc}
x_0 = -1 & 0 & & & & \\
 & & \searrow & & & \\
x_1 = 0 & 1 & \rightarrow & 1 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & \\
x_2 = 2 & 2 & \rightarrow & \frac{1}{2} & \rightarrow & -\frac{1}{6}
\end{array}
.
$$

Berechnen Sie nun $p'(-0.5)$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$p'(-0.5) =$	0.5	1.0	-0.5	-0.6667	0.25	-1.5	-0.3333	0.125	0.8333	0.3333

Benutze die Werte aus dem Tableau, um das Polynom aufzustellen:

$$p(x) = 0 + 1 \cdot (x - (-1)) + (-\frac{1}{6}) \cdot (x - (-1)) \cdot (x - 0) = 1 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}x^2.$$

Entsprechend gilt:

$$p'(x) = \frac{5}{6} - \frac{1}{3}x \Rightarrow p'(-0.5) = 1.0.$$

Aufgabe 5 (1+1+1+1+1 = 5 Punkte)

Gegeben sei eine Quadraturformel $Q(f) := a_0 f(-2) + a_1 f(0) + a_2 f(2)$ auf dem Intervall $[-2, 2]$.

5a) Bestimmen Sie a_0, sodass die Formel einen möglichst hohen Exaktheitsgrad besitzt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$a_0 =$	0.33333	0.66667	1.0	0.25	0.75	0.23	0.44	0.1	0.15	0.16667

[Achtung: neues Intervall in B] Zunächst stellen wir die Lagrange-Basis-Polynome auf:

$$p_0(x) = \frac{(x-0)\cdot(x-1)}{((-1)-0)\cdot((-1)-1)} = \frac{1}{2}(x^2 - x)$$
$$p_1(x) = \frac{(x-(-1))\cdot(x-1)}{(0-(-1))\cdot(0-1)} = -x^2 + 1$$
$$p_2(x) = \frac{(x-(-1))\cdot(x-0)}{(1-(-1))\cdot(1-0)} = \frac{1}{2}(x^2 + x)$$

Nun gilt für die Gewichte: $a_i = \int_{-1}^{1} p_i(x)\mathrm{dx}$. Es folgt für a_0

$$a_0 = \int_{-1}^{1} p_0(x)\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - (-\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{3} = 0.333333.$$

[$\cdot 2$ fuer $[-2, 2]$, $a_0 = 0.66667$]

5b) Bestimmen Sie a_1, sodass die Formel einen möglichst hohen Exaktheitsgrad besitzt.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$a_1 =$	1.33333	2.66667	1.0	1.83333	0.66667	2.0	−1.2	1.66667	−0.25	2.25

Analog berechnet man auch a_1:

$$a_1 = \int_{-1}^{1} p_1(x)\mathrm{dx} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 2$$
$$= \frac{4}{3} = 1.333333.$$

[$\cdot 2$ fuer $[-2, 2]$, $a_1 = 2.66667$]

5c) Sei nun $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar mit $\|f^{(3)}\|_\infty \leq 1$. Wie groß ist der durch die obige Quadraturformel $Q(f)$ erzeugte Fehler maximal? Verwenden Sie dabei die Interpolationsfehlerabschätzung $|f(\hat{x}) - P(f|x_0, x_1, x_2)(\hat{x})| \leq |\prod_{j=0}^{n}(\hat{x} - x_j)| \cdot \max_{y\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(y)|}{(n+1)!}$, $\hat{x} \in [a, b]$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$\lvert\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{dx} - Q(f)\rvert \leq$	0.12830	2.05280	0.76981	0.3849	0.9815	1.5338	1.234	0.15	0.19245	0.58872

Es gilt:

$$\left|\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{dx} - Q(f)\right| = \left|\int_{-2}^{2} f(x) - P(f|-2,0,2)(x)\mathrm{dx}\right|$$
$$\leq \int_{-2}^{2} |f(x) - P(f|-2,0,2)(x)|\mathrm{dx} \leq 4 \cdot \max_{x\in[-2,2]}|x(x-2)(x+2)| \cdot \max_{x\in[-2,2]} \frac{|f^{(3)}(x)|}{3!}$$
$$\leq 4 \cdot \max_{x\in[-2,2]}|x^3 - 4x| \cdot \frac{1}{6} \leq 4 \cdot 3.079202 \cdot \frac{1}{6} = 2.052801.$$

5d) Sei nun $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$. Berechnen Sie $\int_0^2 f(x)\mathrm{dx}$ mit der Simpson-Regel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$I_2(f) =$	1.83004	2.74506	0.91502	0.5	1.2193	1.37253	0.90930	0.53429	1.0	0.045558

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
Q(f) &= 2\left(\frac{1}{6}f(0) + \frac{4}{6}f(1) + \frac{1}{6}f(2)\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2}\cos(1) + \frac{1}{2}\cos(2)\right) = 2.74506.
\end{aligned}
$$

5e) Wie viele Teilintervalle N des Intervalls $[0,1]$ werden benötigt, um mit der summierten Mittelpunktsregel das Integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}$ bis auf $\varepsilon = 0.01$ zu bestimmen, wenn $\|f^{(2)}\|_\infty \leq 5$ gilt?

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$N =$	3	5	1	2	7	8	12	15	9	16

Für die summierte Mittelpunkts-Regel gilt:

$$
\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{dx} - Q(f)\right| \leq \frac{h^2}{24} \cdot \|f^{(2)}\|_\infty \leq \frac{h^2}{24} \cdot 5 \leq 0.01 = \varepsilon
$$

Daraus folgt

$$
h^2 \leq \frac{0.24}{5} \Rightarrow h \leq \sqrt{0.048}.
$$

Also gilt $N \geq \frac{1}{\sqrt{0.048}} \geq 4.56435$ $(\geq 4.5\ldots)$. Es folgt, dass man 5 Teilintervalle benötigt.