VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\mathrm{MAX}}, -x_{\mathrm{MIN}}] \cup [x_{\mathrm{MIN}}, x_{\mathrm{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\mathrm{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

1.	Es gilt $\mathrm{fl}(x+y) = \mathrm{fl}(x) + \mathrm{fl}(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{M}(b,m,r,R)$.	falsch
2.	Für jede Zahl $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl $\tilde{x} \in \mathbb{M}(b,m,r,R)$ und ein ϵ mit $\lvert\epsilon\rvert \leq$ eps, sodass $\tilde{x} = x\,(1+\epsilon)$ gilt.	wahr
3.	Die Zahl 33 ist in $\mathbb{M}(2,5,-8,8)$ exakt darstellbar.	falsch
4.	Die Genauigkeit der Standardrundung $\mathrm{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ hängt von R ab.	falsch
5.	Geben Sie die nicht-normalisierte Darstellung der Zahl 51 in $\mathbb{M}(7,6,-8,8)$ an.	**102**
6.	Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diffenzierbare Funktionen, die beide an der Stelle $x = 1$ gut konditioniert sind. Dann ist auch die Funktion $f + g$ an der Stelle $x = 1$ gut konditioniert.	falsch
7.	Die Funktion $f(x,y) = x + y^2$ ist gut konditioniert für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$.	wahr
8.	Es seien $x = 3$ und $y = 3 + 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $e^x - e^{2y}$ tritt Auslöschung auf.	falsch
9.	Für schlecht konditionierte Probleme gibt es keine stabilen Algorithmen zur Lösung des Problems.	falsch
10.	Berechnen Sie die relative Konditionszahl $\kappa_{rel}(x)$ der Funktion $f(x) = x\cos x$ an der Stelle $x = 1$.	**0.5574**

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$.

1.	Es seien $\tilde{x}$ eine Annäherung der Lösung x^* und $r := b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Es gilt $\kappa(A)^{-1}\frac{\lVert r\rVert}{\lVert b\rVert} \leq \frac{\lVert x^*-\tilde{x}\rVert}{\lVert x^*\rVert} \leq \kappa(A)\frac{\lVert r\rVert}{\lVert b\rVert}$, mit $\kappa(A) := \lVert A\rVert\lVert A^{-1}\rVert$.	wahr
2.	Es existieren stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$ gilt.	falsch
3.	Es existieren stets eine orthogonale Matrix Q und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = QR$ gilt.	wahr
4.	Es sei A orthogonal. Dann gilt $\lVert x^*\rVert_2 = \lVert b\rVert_2$.	wahr
5.	Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0.2 & 1 & 0.8 \\ 0.9 & 1 & 3.1 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechnen Sie $\lVert D\rVert_\infty$.	**0.5**
6.	Für die Konditionszahl $\kappa(\cdot)$ gilt $\kappa(A)\cdot\kappa(A^{-1}) = 1$.	falsch
7.	Es sei A eine obere Dreiecksmatrix. Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung x^* über Rückwärtseinsetzen beträgt etwa $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.	falsch
8.	Pivotisierung verbessert die Kondition des linearen Gleichungssystems.	falsch
9.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\kappa_\infty(B) \leq \kappa_\infty(A)$, wobei $\kappa_\infty(\cdot)$ die Konditionszahl bezüglich der Maximumnorm ist.	wahr
10.	Berechnen Sie $\lVert A\rVert_1$ für $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.	**10**

VF-3:		
1.	Das Produkt zweier orthogonalen $m \times m$-Matrizen ist eine orthogonale Matrix.	wahr
2.	Die Summe zweier orthogonalen $m \times m$-Matrizen ist eine orthogonale Matrix.	falsch
3.	Die Summe zweier symmetrisch positiv definiten $m \times m$-Matrizen ist eine symmetrisch positiv definite Matrix.	wahr
4.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Es gilt $\kappa_\infty(Q_v) = 1$, wobei $\kappa_\infty(\cdot)$ die Konditionzahl bezüglich der Maximumnorm ist.	falsch
5.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$, $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation und $x \in \mathbb{R}^m$ mit $x \neq 0$, $x^Tv = 0$. Geben Sie α an so dass $Q_v x = \alpha x$ gilt.	**1**
6.	Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ existiert eine Cholesky-Zerlegung.	falsch
7.	Für jede symmetrisch positiv definite Matrix A gilt $\det(A) > 0$.	wahr
8.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten $n \times n$-Matrix über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{6}n^3$ Operationen (gem. Vorl./Buch).	wahr
9.	Für jede symmetrische orthogonale Matrix Q gilt $Q^2 = I$.	wahr
10.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$, $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Berechne $\det(Q_v)$.	**-1**

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt, mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ferner seien $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des linearen Ausgleichsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ und $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ der Winkel zwischen Ax^* und b.

1.	Es gilt $\det(\tilde{R}) = \det(A)$.	falsch
2.	Es gilt $\kappa_2(\tilde{R}) = \kappa_2(A)$, wobei $\kappa_2(\cdot)$ die (verallgemeinerte) Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.	wahr
3.	Je kleiner der Winkel Θ, desto besser ist die Kondition des Ausgleichsproblems bezüglich Störungen in den Daten b.	wahr
4.	Es sei $LDL^T = A^TA$ die Cholesky-Zerlegung von A^TA. Dann gilt $x^* = L^{-1}D^{-1}L^{-T}A^Tb$.	falsch
5.	Es seien $m = 4$, $n = 2$ und $Qb = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\|Ax^* - b\|_2^2$.	**10**
6.	Es gilt $Ax^* - b \perp \text{Bild}(A)$.	wahr
7.	Die Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems kann man als Fixpunktiteration darstellen.	wahr
8.	Bei der Gauß-Newton Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist die Konvergenzordnung in der Regel zwei.	falsch
9.	Eine geeignete Wahl des skalaren Parameters μ im Levenberg-Marquardt-Verfahren kann den Einzugsbereich der Methode erweitern.	wahr
10.	Es seien $m = 4$, $n = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie x^*.	**1**

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.		
1.	Es sei $\Phi'(x^*) = 0$, und x_0 so dass die Folge $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ gegen x^* konvergiert. Es gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1}-x_k\|_\infty}{\|x^*-x_k\|_\infty} = 1$.	wahr
2.	Falls die Fixpunktiteration konvergiert, so gilt $\|x_k - x^*\| \leq \|x_k - x_{k-1}\|$ für alle $k \geq k_0$ und hinreichend großes k_0.	falsch
3.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 1]$ erfüllt.	wahr
4.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$. Die Fixpunktiteration konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.	wahr
5.	Es sei $\Phi : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) := x^2 + x - \frac{8}{x}$. Geben Sie den eindeutigen Fixpunkt von Φ an.	**2**
6.	Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Sei x_0 so gewählt, dass die Newton Methode $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ mit Startwert x_0 gegen x^* konvergiert. Es gilt: $x^* - x_k \approx x_k - x_{k-1}$ für k hinreichend groß.	falsch
7.	Die Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren Funktion konvergiert für alle Startwerte x_0, x_1, wofür $f(x_0)f(x_1) < 0$ gilt.	falsch
8.	Es sei $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Das auf f angewandte Newton Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in (0, 1]$ gegen die Nullstelle $x^* = 1$ dieser Funktion.	wahr
9.	Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^*, und es gelte $f(x^*) = 0$, $\det(f'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$. Die lokale Konvergenzordnung der Newton Methode für diesen Fall ist mindestens 2.	wahr
10.	Es seien $f(x) = x^5 - 5$, $x_0 = 1$, und x_k, $k = 1, 2, \ldots$, die durch das Newton Verfahren induzierte Folge. Bestimmen Sie x_1.	**1.8**

VF-6: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Es sei $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt $P(Q \mid x_0, \ldots, x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n.	wahr
2.	Es gilt $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f \mid x_{n-1}, \ldots, x_0)(x) + (x - x_{n-1})^n [x_0, \ldots, x_n]\, f$.	falsch
3.	Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$. Dann gilt $a_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$.	wahr
4.	Sei $n = 4$. Es gilt $P(f \mid x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)(x) = P(f \mid x_3, x_1, x_4, x_2, x_1)(x)$.	falsch
5.	Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $f(x_0) = 0$ und $f(x_1) = 4$. Berechnen Sie $P(f \vert x_0, x_1)(\frac{7}{4})$.	**3**
Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_m^n(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = \frac{b-a}{n}$.		
6.	Es seien $I_m^{NC}(f)$ und $I_m^G(f)$ die Newton-Cotes-Formel und die Formel der Gauss-Quadratur. Für $m \geq 1$ gilt, dass die Größe des Fehlers bei $I_m^G(f)$ strikt kleiner ist als bei $I_m^{NC}(f)$.	falsch
7.	Sei $I_2^n(f)$ die summierte Simpsonregel. Es gilt $I(x^3) = I_2^n(x^3)$ für jedes $n \geq 1$.	wahr
8.	Es seien $f \in C^6[a, b]$ und $I_4^n(f)$ die Newton-Cotes-Formel mit $m = 4$. Es gilt $\vert I_4^n(f) - I(f)\vert \leq ch^6$, wobei die Konstante c nicht von n abhängt.	wahr
9.	Bei den Newton-Cotes-Formeln hängen die Gewichte w_j nicht vom Intervall $[a, b]$ ab.	wahr
10.	Es seien $a = 0$, $b = 1$ und $I_1(f)$ die Trapezregel. Berechnen Sie den Fehler $I(x^3 + 1) - I_1(x^3 + 1)$.	**0.25**